

F



Herleitung von Kriterien für die Anzahl reeller Wurzeln von Gleichungen
(speciell der allgemeinen viergliedrigen und der Gleichungen vom fünften Grade)
aus der Beschaffenheit ihrer Discriminanten-mannigfaltigkeit.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

von der

Philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

genehmigt

und nebst den beigefügten Thesen öffentlich zu verteidigen

am 5. Juli 1889, vormittags 11 Uhr,

von

Carl Faerber

aus Berlin.

Opponenten:

Herr Dr. phil. A. Schmidt,
Herr Dr. phil. A. Ebeling,
Herr Dr. phil. E. Jahnke.

BERLIN.

Druck von Gebr. Unger, Schönebergerstr. 17a.

1889.

Die Anwendung des STURMschen Satzes auf eine algebraische Gleichung mit variablen Koeffizienten liefert eine Reihe ganzer rationaler Funktionen dieser Koeffizienten, aus deren Vorzeichen sich die Anzahl der reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung unmittelbar bestimmen lässt. Um solche Funktionen zu ermitteln, bedarf es aber, wie Herr KRONECKER in der Abhandlung „Ueber Sturmsche Funktionen"[1]) gezeigt hat, des STURMschen Satzes nicht; man erreicht dieses Ziel auch durch alleinige Untersuchung der Discriminante der gegebenen Gleichung. In der erwähnten Arbeit hat Herr KRONECKER durch eine solche Untersuchung die Kriterien für die Realität der Wurzeln der allgemeinen Gleichung vierten Grades hergeleitet.

Enthält eine algebraische Gleichung mit einer Unbekannten i von einander unabhängige, reelle Koeffizienten

$$x_1, x_2 \dots x_i,$$

während andere Koeffizienten entweder gar nicht vorkommen oder eindeutige, reelle Funktionen der ersteren sind, so entspricht jedem Punkte der $i$fachen Mannigfaltigkeit $(x_1, x_2 \dots x_i)$ eine bestimmte Gleichung und umgekehrt, jeder Gleichung mit bestimmten Werten der Koeffizienten entspricht ein einziger Punkt der $i$fachen Mannigfaltigkeit. Aus der Stetigkeit der algebraischen Funktionen folgt, dass die Gesamtheit derjenigen Stellen, denen die Gleichungen mit einer bestimmten Zahl reeller Wurzeln entsprechen, aus einem oder aus mehreren, kontinuierlich zusammenhängenden, $i$fach ausgedehnten Gebieten besteht. Da die Zahl der reellen Wurzeln der Gleichung bei Variierung ihrer Koeffizienten sich nur dann ändern kann, wenn solche Werte passiert werden, wofür die Discriminante

$$D(x_1, x_2 \dots x_i)$$

1) Monatsberichte der Berliner Akademie vom 14. Februar 1878. cfr. auch KRONECKER, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen (Journal für Mathematik, Bd. 92, pag. 121).

verschwindet, so werden die verschiedenen Gebiete durch die $(i-1)$fache Mannigfaltigkeit

$$D(x_1, x_2 \, . \, . \, . \, . \, x_i) = 0,$$

die „Discriminantenmannigfaltigkeit“ der gegebenen Gleichung, von einander getrennt. Die Gebiete, in denen D dasselbe Vorzeichen hat, hängen in singulären, weniger als $(i-1)$fach ausgedehnten Gebilden der Discriminantenmannigfaltigkeit mit einander zusammen und können durch solche $(i-1)$fache Mannigfaltigkeiten von einander geschieden werden, welche diese singulären Gebilde enthalten. Ist die Scheidung durchgeführt, d. h. ist jedes einzelne Gebiet durch die Vorzeichen einer Reihe von ganzen rationalen Funktionen von $x_1, \ldots x_i$ charakterisiert, so sind damit die Kriterien für die Realität der Wurzeln der vorgelegten Gleichung gefunden.

Will man sich dieses, von Herrn KRONECKER angegebenen Verfahrens bedienen, so hat man im wesentlichen Aufgaben von dreierlei Art zu lösen:

1. die Singularitäten der Discriminantenmannigfaltigkeit durch algebraische Gleichungen darzustellen;

2. $(i-1)$fache Mannigfaltigkeiten zu suchen, welche aus einem singulären Gebilde keine andere reelle Mannigfaltigkeit als eine bestimmte singuläre von einer um 1 geringeren Dimension herausschneiden;

3. zu prüfen, ob $i$fach ausgedehnte Gebiete, welche kontinuierlich in sich zusammenhängen, durch eine solche $(i-1)$fache Mannigfaltigkeit in zwei Teile zerlegt werden, deren jeder wieder ein einfaches Kontinuum bildet.

Unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten der Gleichung linear von $x_1, \ldots x_i$ abhängen, lässt sich die erste Aufgabe vollständig erledigen. Dass auf eine bestimmte Art, nämlich durch die STURMschen Funktionen, auch die Scheidung der Gebiete zu erreichen sein muss, ist von vornherein klar; aber die direkte und vollständige Lösung der zweiten und dritten Aufgabe bietet im allgemeinen grosse Schwierigkeiten. Bei gewissen Kategorien von Gleichungen lassen sich dieselben jedoch nicht nur überwinden, sondern die Diskussion der Discriminantenmannigfaltigkeit liefert weit einfachere Resultate als der STURMsche Satz. Für solche Gleichungen, nämlich für die allgemeinen viergliedrigen die Gleichungen vom fünften und die KRONECKERsche Resolvente

derselben vom zwölften Grade soll in vorliegender Arbeit die Anzahl der reellen Wurzeln bestimmt werden.

Bevor ich zum Thema übergehe, sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor KRONECKER, für seine fördernde Anregung, sowie für die Teilnahme, welche er an dem Verlaufe der Arbeit genommen, meinen ehrerbietigsten und tiefgefühltesten Dank auszusprechen.

---

§ 1.

Die Singularitäten der Discriminantenmannigfaltigkeit einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten lineare Funktionen i reeller, von einander unabhängiger Grössen $x_1 \dots x_i$ sind.

Die gegebene Gleichung sei

$$F(t;\ x_1 \dots x_i) = 0$$

und ihre Discriminante

$$D(x_1 \dots x_i).$$

Die gewöhnliche Methode, die Singularitäten einer algebraischen $(i-1)$fachen aus einer $i$fachen ausgesonderten Mannigfaltigkeit zu ermitteln, welche darin besteht, dass man den Inhalt jedes der Gleichungssysteme

$$D = 0,\ \frac{\partial D}{\partial x_\mu} = 0;\ (\mu = 1 \dots i)$$

$$D = 0,\ \frac{\partial D}{\partial x_\mu} = 0,\ \frac{\partial^2 D}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0;\ (\mu, \nu = 1 \dots i)$$

etc. bestimmt, und welche bei der Discriminantenfläche der allgemeinen Gleichung vierten Grades auch zum Ziele führt, ist der Komplikation der Rechnung wegen schon für die allgemeine Gleichung fünften Grades nicht mehr anwendbar. Es bietet sich uns ein anderer Weg dar, indem wir beachten, dass die Discriminantenmannigfaltigkeit der Gleichung

$$F(t;\ x_1 \dots x_i) = 0$$

der geometrische Ort des Schnittes zweier benachbarten Mannigfaltigkeiten der durch die Gleichung

$$F(t;\ x_1 \dots x_i) = 0$$

mit dem veränderlichen Parameter t dargestellten Schar ist, dass also die Discriminantenmannigfaltigkeit zu denjenigen $(i-1)$fachen aus der $i$fachen ausgeschiedenen Mannigfaltigkeiten gehört, welche den abwickelbaren Flächen im dreidimensionalen Raume entsprechen, und indem wir die von CAYLEY in seinem „Mémoire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables“ [1]) gegebenen Entwicklungen auf die $i$fache Mannigfaltigkeit ausdehnen. Wir werden uns in diesem Paragraphen nur mit denjenigen Singularitäten der Discriminantenmannigfaltigkeit beschäftigen, die stets, d. h. ohne dass die Koeffizienten von $F(t; x_1 \dots x_i)$ irgend welchen vorgeschriebenen Bedingungen zu genügen brauchen, auftreten. Zuvor sei noch bemerkt, dass der Kürze wegen jede $k$fache aus der $i$fachen ausgesonderte Mannigfaltigkeit als eine M_k, und eine durch nur lineare Gleichungen definierte M_k als eine ebene M_k bezeichnet werden soll. Wir gehen von der Schar S_{i-1} ebener M_{i-1} aus, welche durch die Gleichung

$$F(t; x_1 \dots x_i) = 0$$

mit dem veränderlichen Parameter t dargestellt werden. Je zwei benachbarte M_{i-1} der Schar schneiden sich in einer ebenen M_{i-2} und die sämtlichen Schnittmannigfaltigkeiten bilden eine Schar S_{i-2}, deren Gleichungen

$$F(t; x_1 \dots x_i) = 0, \quad \frac{\partial F(t; x_1 \dots x_i)}{\partial t} = 0$$

sind, wenn t wiederum als veränderlicher Parameter betrachtet wird. Je zwei benachbarten M_{i-2} aus S_{i-2} oder je drei benachbarten M_{i-1} aus S_{i-1} ist eine ebene M_{i-3}

$$F(t; x_1 \dots x_i) = 0, \quad \frac{\partial F(t; x_1 \dots x_i)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(t; x_1 \dots x_i)}{\partial t^2} = 0$$

gemeinsam. Die Gesamtheit der ebenen M_{i-3}, welche allen Werten des t entsprechen, heisse die Schar S_{i-3}. So fortfahrend definiert man ferner eine Schar S_{i-4} ebener M_{i-4} u. s. w., schliesslich eine Schar S_o ebener M_o, d. h. eine Reihe von Punkten, in der Art, dass jede ebene M_k aus S_k [2]) der Schnitt von 2 benachbarten ebenen M_{k+1} aus S_{k+1}, von 3 benachbarten ebenen M_{k+2}

1) Liouvilles Journal, Bd. X, pag. 245, und Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Bd. V, pag. 18. — Vergl. auch SALMON-FIEDLER, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Teil, 3. Aufl., pag. 96.

2) k bedeutet hier wie im folgenden 0 und jede der ganzen Zahlen von 1 bis $i-2$.

aus S_{k+2} u. s. w., endlich von $(i-k)$ benachbarten ebenen M_{i-1} aus S_{i-1} ist. Die ebenen M_k der Schar S_k bilden eine M_{k+1}, welche algebraisch durch die bei der Elimination von t aus dem Gleichungssystem

$$F=0, \frac{\partial F}{\partial t}=0 \ldots . \frac{\partial^{i-k-1} F}{\partial t^{i-k-1}}=0$$

hervorgehenden Gleichungen, resp. durch dieses System selbst bestimmt ist, wenn man in demselben t als veränderlichen Parameter auffasst. Diese M_{k+1} nennen wir die „M_{k+1} des Systems". Die „M_{i-1} des Systems" ist die Discriminantenmannigfaltigkeit. Unter der M_0 des Systems verstehen wir die Gesamtheit der (in endlicher Zahl vorhandenen) Punkte, deren Koordinaten den Gleichungen

$$F=0, \frac{\partial F}{\partial t}=0 \ldots . \frac{\partial^{i} F}{\partial t^{i}}=0$$

genügen und die man im Falle $i=3$ als die stationären Punkte bezeichnet. Die M_h des Systems liegt vollständig in der M_{k+1} des Systems, wenn $0 \leqq h<k+1$;
also gehören die sämtlichen Mannigfaltigkeiten des Systems der Discriminantenmannigfaltigkeit an. Da die letztere nichts anderes ist als die Gesamtheit der ebenen M_{i-2} der Schar S_{i-2} und da alle Punkte einer ebenen Mannigfaltigkeit einfache sind, so ist ein Punkt der Discriminantenmannigfaltigkeit ein νfacher, wenn durch ihn ν (ev. benachbarte) ebene M_{i-2} aus S_{i-2} hindurch gehen. Jeder Punkt der M_{k+1} des Systems liegt auf einer ebenen M_k der Schar S_k, also auf $(i-k-1)$ benachbarten ebenen M_{i-2} der Schar S_{i-2}, ist demnach ein $(i-k-1)$facher Punkt der Discriminantenmannigfaltigkeit[1]). Die stationären Punkte (die M_0 des Systems) sind $i$fache Punkte derselben. Die „Mannigfaltigkeiten des Systems" sind mithin sämtlich singuläre Gebilde der Discriminantenmannigfaltigkeit; aber es sind nicht die einzigen.

Um alle Mannigfaltigkeiten von niederer als der $(i-1)$ten Dimension, deren sämtliche Punkte mehrelementige Punkte der Discriminantenmannigfaltigkeit sind, unter eine gemeinsame Formel zu bringen, betrachten wir gleichzeitig

---

1) Es giebt jedoch auf der M_{k+1} des Systems eine $k$fache Mannigfaltigkeit von Punkten, deren jeder wenigstens $(i-k)$ ebenen M_{i-2} aus S_{i-2} angehört, folglich ein mindestens $(i-k)$facher Punkt der Discriminantenmannigfaltigkeit ist.

eine ebene M_{d_1} der Schar S_{d_1}

$$F(t_1)=0, \frac{\partial F(t_1)}{\partial t_1}=0 \dots \frac{\partial^{i-d_1-1} F(t_1)}{\partial t_1^{i-d_1-1}}=0,$$

eine ebene M_{d_2} der Schar S_{d_2}

$$\text{A)} \qquad F(t_2)=0, \frac{\partial F(t_2)}{\partial t_2}=0 \dots \frac{\partial^{i-d_2-1} F(t_2)}{\partial t_2^{i-d_2-1}}=0,$$

u. s. w., endlich

eine ebene M_{d_l} der Schar S_{d_l}

$$F(t_l)=0, \frac{\partial F(t_l)}{\partial t_l}=0 \dots \frac{\partial^{i-d_l-1} F(t_l)}{\partial t_l^{i-d_l-1}}=0.$$

Die t bedeuten irgend welche, von einander verschiedene Zahlen; während beliebig viele der d, die sämtlich kleiner als $i-1$ sein sollen, einander gleich sein können.

Die Anzahl der Gleichungen A) beträgt

$$l \,.\, i - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} d_\lambda = a.$$

Wenn

$$a \leqq i,$$

so schneiden sich die l ebenen Mannigfaltigkeiten A) bei beliebig gegebenen Werten der t in einer ebenen M_{i-a}[1]); wenn

$$i < a \leqq i + l,$$

so haben dieselben Mannigfaltigkeiten bei willkürlich gegebenen Werten der t keinen Punkt gemeinsam; damit dies der Fall sei, müssen unter den t $(a-i)$ Bedingungsgleichungen bestehen; wenn schliesslich

$$i + l < a,$$

so giebt es keinen Punkt, der gleichzeitig allen Mannigfaltigkeiten A) angehört, welche Werte die t auch haben mögen.

Indem wir jetzt voraussetzen, dass

$$a \leqq i + l,$$

lassen wir jedes der t alle zulässigen Zahlwerte, d. h. im Falle $a \leqq i$ alle, im Falle $i < a \leqq i + l$ alle mit den erwähnten Bedingungen in Einklang stehenden, annehmen. Die den sämtlichen Wertsystemen t entsprechenden Schnittmannigfaltigkeiten bilden in beiden Fällen eine M_{i+l-a}, welche wir als die Mannigfaltigkeit

1) Wir sehen davon ab, dass die Mannigfaltigkeiten A) sich auch in einer ebenen Mannigfaltigkeit von mehr als $i-a$ Dimensionen schneiden können, weil diese Singularität nicht bei jeder Funktion $F(t; x_1 \dots x_i)$ auftritt.

$$(d_1, d_2 \ldots d_l)$$

bezeichnen wollen und welche durch das Gleichungssystem A) dargestellt wird, sobald man in demselben die t als veränderliche Parameter betrachtet.

$$(d'_1, d'_2 \ldots d'_{l'})$$

ist vollständig in

$$(d_1, d_2 \ldots d_l)$$

enthalten, wenn

$$l' \geqq l$$

und wenn sich jedem d ein d' zuweisen lässt, welches nicht grösser ist als dieses d. Der Discriminantenmannigfaltigkeit gehört mithin

$$(d_1, d_2 \ldots d_l)$$

für alle Werte l und $d_1 \ldots d_l$ an, für welche diese Mannigfaltigkeit überhaupt definiert ist. Jeder Punkt von

$$(d_1, d_2 \ldots d_l)$$

liegt in

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} (i - d_\lambda - 1) = a - l$$

ebenen M_{i-2} der Schar S_{i-2}, ist folglich ein $(a - l)$facher Punkt der Discriminantenmannigfaltigkeit. Andererseits gehen durch jeden νfachen[1]) Punkt der letzteren ν ebene M_{i-2} der Schar S_{i-2} hindurch, die zu mehreren Gruppen auf einander folgender Mannigfaltigkeiten zusammengefasst sein können. Sind l solcher Gruppen vorhanden und in der λten $i - d_\lambda - 1$ benachbarte ebene M_{i-2} vereint[2]), so liegt der Punkt in $(d_1, d_2 \ldots d_l)$. Dieses letztere Gebilde ist also der Ort eines $(a - l)$fachen Punktes bestimmter Art der Discriminantenmannigfaltigkeit. Nur die M_o des Systems (d. h. die Gesamtheit der stationären Punkte, welche $i$fache Punkte der Discriminantenmannigfaltigkeit sind) ist in dem Symbol $(d_1, d_2 \ldots d_l)$ nicht einbegriffen[3]).

---

1) ν bedeutet irgend eine positive ganze Zahl, die nicht grösser als i ist; λ im folgenden jede der Zahlen $1, 2 \ldots l$.

2) Also $\nu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=l} (i - d_\lambda - 1) = a - l$.

3) Weil nämlich nach unserer Festsetzung d_λ keinen negativen Wert annehmen soll. — Die Theorie der $(i-1)$fachen aus der $i$fachen ausgeschiedenen Mannigfaltigkeiten, welche den abwickelbaren Flächen im dreidimensionalen Raume entsprechen, liesse sich natürlich weiter ausführen; wir haben uns hier auf das für unser Thema Notwendige beschränkt.

Die Discriminantenmannigfaltigkeit und ihre Singularitäten stehen in enger Beziehung zu denjenigen Gleichungen

$$F(t; x_1 \dots x_i) = 0,$$

welche vielfache Wurzeln besitzen. Hat die Gleichung die $(i - d_\lambda)$fache Wurzel t_λ, so liegt der ihr entsprechende Punkt in der Schnittmannigfaltigkeit der ebenen Mannigfaltigkeiten A) pag. 6, und umgekehrt ist jedem Punkte dieses Schnittes eine Gleichung $F(t; x_1 \dots x_i) = 0$ mit der $(i - d_\lambda)$fachen Wurzel t_λ zugeordnet. Der geometrische Ort des Punktes, dem eine Gleichung mit irgend einer $(i - d_\lambda)$fachen Wurzel entspricht, ist die Mannigfaltigkeit $(d_1, d_2 \dots d_l)$. Die Gleichungen, welche eine $(i + 1)$fache Wurzel besitzen, gehören zu den stationären Punkten des Systems[1]).

Um alle reellen Punkte der Mannigfaltigkeit $(d_1, d_2 \dots d_l)$ zu erhalten, hat man in den Gleichungen A) pag. 6 den Parametern t alle (falls $i < a \leqq i + l$ alle mit den Bedingungsgleichungen verträglichen) reellen Werte, und wenn zwei der d einander gleich sind, ausserdem noch den zu diesen d zugehörigen Parametern t alle (ev. die mit den Bedingungsgleichungen verträglichen) konjugiert komplexen Werte beizulegen.

Eine wichtige Rolle bei unseren Untersuchungen spielt die Mannigfaltigkeit

$$(d_1, \ d_2 \dots d_l),$$

für welche

$$d_1 = d_2 = \dots = d_l = i - 2.$$

Bezeichnet man nämlich mit G_h die Gesamtheit derjenigen Punkte, denen Gleichungen mit h Paaren imaginärer Wurzeln entsprechen, so können die Gebiete G_h und G_{h+l} nur in der eben genannten Mannigfaltigkeit zusammenhängen. Denn wenn es möglich ist, auf einer stetigen M_1 aus G_{h+l} in G_h zu gelangen, ohne ein anderes $i$fach ausgedehntes Gebiet zu passieren, so werden beim Übergange gleichzeitig l Paare von konjugiert komplexen Wurzeln reell, was nur eintreten kann, wenn jeder Punkt der Grenze einer

---

1) In anderer Art weist auch Herr HILBERT in einem kürzlich erschienenen Aufsatze (Mathematische Annalen, Bd. 30, pag. 437: „Über die Singularitäten der Discriminantenfläche") den Zusammenhang zwischen den vielfachen Wurzeln einer Gleichung und den Singularitäten ihrer Discriminantenmannigfaltigkeit nach.

Gleichung mit l Paaren gleicher reeller Wurzeln zugeordnet ist, also der Mannigfaltigkeit

$$(i-2, \overbrace{i-2, \ldots\ldots i-2}^{l})$$

angehört[1]).

Jedes der Gebiete G ist, wie Herr Prof. KRONECKER in seinen Vorlesungen nachweist, ein in sich zusammenhängendes Kontinuum, vorausgesetzt, dass die Wurzeln der Gleichung

$$F(t;\ x_1 \ldots x_i) = 0$$

von einander unabhängig sind oder dass ihre Summe einen vorgeschriebenen reellen Wert hat.

---

§ 2.

Die viergliedrigen Gleichungen.

I.

Die Kriterien dafür, dass eine dreigliedrige Gleichung

$$t^n + yt^r + x = 0$$

eine bestimmte Anzahl reeller Wurzeln habe, sind von verschiedenen Mathematikern aufgestellt worden. DROBISCH[2]) bedient sich geometrischer Betrachtungen, die etwas weitläufig sind, weil er 16 Fälle zu unterscheiden genötigt ist. LOBATTO[3]) leitet die Kriterien aus der Cartesischen Zeichenregel und dem ROLLEschen Satze und zwar für dieselben 16 Fälle her. In einer zweiten Arbeit[4]) untersucht DROBISCH, nach welchen Gesetzen sich die

---

1) Für die Trennung der Gebiete kommt dagegen nicht in Betracht die Mannigfaltigkeit $(i-3)$. Da für alle Punkte derselben die vorletzte Sturmsche Funktion aber ebensowohl verschwindet wie für die Punkte von $(i-2, i-2)$, so sind schon deshalb in vielen Fällen die Sturmschen Kriterien nicht die einfachsten.

2) Über die reellen Wurzeln dreigliedriger algebraischer Gleichungen von beliebigem Grade. Zeitschrift für Mathematik und Physik; herausgegeben von SCHLÖMILCH. 2. Jahrg. 1857.

3) Bijdrage tot de oplossing der hoogere magts vergelijkingen. Verslagen en mededeelingen der koninklijke akademie van wetenschappen. Afdeeling Naturkunde. Zevende Deel. Jaargang 1858.

4) Einfachere Ableitung der früher mitgeteilten Sätze über die reellen Wurzeln der dreigliedrigen algebraischen Gleichungen. Zeitschrift für Mathematik und Physik; herausgeg. von SCHLÖMILCH. 4. Jahrg. 1859.

linke Seite der Gleichung ändert, wenn t die Reihe der reellen Zahlen durchläuft, was ihm durch Bestimmung der Maxima und Minima des Trinoms gelingt. Später hat DOMENICO REGIS[1]), wahrscheinlich ohne Kenntnis der eben genannten Untersuchungen, die Aufgabe für den Fall $r = 1$ wieder mit Zuhülfenahme von Kurven gelöst. Endlich benutzt K. E. HOFFMANN[2]), der an eine Notiz in SERRETs cours d'algèbre supérieure anknüpft, ebenso wie LOBATTO den ROLLEschen Satz, um die Zahl der reellen Wurzeln zu ermitteln[3]).

Der Erfolg aller dieser nicht wesentlich von einander verschiedener Methoden beruht darauf, dass sich die Werte t, für welche die Ableitung des Trinoms verschwindet, ohne weiteres in geschlossener Form angeben lassen. In keiner der citierten Abhandlungen ist ausgesprochen, dass die als Kriterien verwendeten Funktionen in engstem Zusammenhange mit der Discriminante der trinomischen Gleichung stehen. Beachtet man aber die Bedeutung der Discriminante für den vorliegenden Zweck, so gestaltet sich sowohl die Untersuchung wie das Resultat einfacher als bei den genannten Autoren. Der Kürze wegen setzen wir voraus, dass n und r nicht beide gerade sind. Wie man mit Hilfe der Cartesischen Regel einsieht, kann die Gleichung bei geradem n nur 0 oder 2, bei ungeradem n nur 1 oder 3 reelle Wurzeln haben. Es ist also von vornherein klar, dass die beiden möglichen Fälle sich stets durch das Vorzeichen der Discriminante charakterisieren lassen müssen. Als Resultante der beiden Funktionen

$$n t^{n-1} + r \,.\, y t^{r-1} \text{ und } (n-r) y t^r + n x$$

hat die letztere, von einem numerischen Faktor abgesehen, den Wert

$$x^{r-1} \left[(-1)^{\nu} (n-r)^{\nu-\varrho} \,.\, r^{\varrho} \,.\, y^{\nu} - n^{\nu} \,.\, x^{\nu-\varrho} \right]^{\vartheta},$$

wo

$$n = \nu \vartheta, \; r = \varrho \vartheta$$

---

1) Sul numero delle radici che puo'avere l'equazione

$$x^m - px + q = 0$$

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del professore Battaglini. VIII. 1870, pag. 226 - 228.

2) Über die Auflösung der trinomischen Gleichungen durch kettenbruchähnliche Algorithmen. GRUNERTS Archiv. Bd. 67. 1881.

3) Das Wesentlichste über die Zahl der reellen Wurzeln einer dreigliedrigen Gleichung findet sich übrigens schon in GAUSS' Beiträgen zur Theorie der algebraischen Gleichungen (Werke, Bd. III, pag. 85). Doch machte der Hauptzweck dieser Arbeit eine erschöpfende Darstellung aller Fälle nicht erforderlich.

gesetzt ist und ν, ϱ relativ prim sind. Da ϑ ungerade ist, hängt die Anzahl der reellen Wurzeln nur von dem Vorzeichen von

$$x^{r-1} \, . \, [(-1)^{\nu} (n-r)^{\nu-\varrho} \, . \, r^{\varrho} \, . \, y^{\nu} - n^{\nu} \, . \, x^{\nu-\varrho}]$$

ab[1]).

Untersuchungen über die Zahl der reellen Wurzeln einer beliebigen viergliedrigen Gleichung scheinen bisher nicht veröffentlicht zu sein. Durch Anwendung des STURMschen Satzes erhält man allerdings wie bei jeder Gleichung eine Reihe von Funktionen, aus deren Vorzeichen die gesuchte Anzahl zu bestimmen ist. Diese Funktionen treten aber in einer wenig befriedigenden und wenig brauchbaren Form auf. Daher dürfte es gerechtfertigt sein, die von Herrn KRONECKER angegebene Methode, die Kriterien durch alleinige Untersuchung der Discriminantenmannigfaltigkeit zu finden, auf die viergliedrigen Gleichungen anzuwenden. Wir werden sehen, dass auf diese Weise die Unterscheidung der einzelnen Fälle sich durch einfachere Funktionen und durch eine geringere Zahl derselben erreichen lässt, als das STURMsche Verfahren erforderlich macht[2]).

II.

Jede viergliedrige algebraische Gleichung kann in der Form

$$r t^m + r \, . \, z t^n + y t^r + x = 0$$

geschrieben werden, wo

$$m > n > r$$ [3]).

---

1) In dem oben ausgeschlossenen Falle: n und r gerade, hat die Gleichung 0,2 oder 4 reelle Wurzeln. Die Discriminante hat dasselbe Vorzeichen wie x. Einem negativen Werte von x entsprechen 2 reelle, einem positiven 4 oder 0 reelle Wurzeln. Die Betrachtung der Gebiete, in welche die xyEbene durch die Discriminantenkurve geteilt wird, lehrt, dass 4 reelle Wurzeln vorhanden sind, sobald

$$y < 0, \; (-1)^{\nu} \cdot (n-r)^{\nu-\varrho} \cdot r^{\varrho} y^{\nu} - n^{\nu} \, . \, x^{\nu-\varrho} > 0;$$

dagegen 0, sobald

$$y > 0 \text{ oder } y < 0, \; (-1)^{\nu} (n-r)^{\nu-\varrho} r^{\varrho} y^{\nu} - n^{\nu} x^{\nu-\varrho} < 0.$$

2) Von den $(m-1)$ STURMschen Funktionen, die zu einer Gleichung $m$ten Grades gehören, sind bei der viergliedrigen Gleichung

$$t^m + z t^n + y \cdot t^r + x = 0$$

$m - n - 2$ stets identisch 0, so dass im allgemeinen $n+1$ übrig bleiben.

3) Ist der grösste gemeinsame Teiler Θ der drei Zahlen m, n, r von 1 verschieden, so hat die vorgelegte Gleichung, falls Θ ungerade, ebensoviel reelle Wurzeln wie die Gleichung

Betrachtet man x, y, z als die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen Raume, so entspricht jedem Punkte des Raumes eine bestimmte viergliedrige Gleichung und umgekehrt. Die Discriminantenmannigfaltigkeit ist eine abwickelbare Fläche. Der Wert der Discriminante D ergiebt sich durch Elimination von t aus den beiden Funktionen

$$rt^m + rzt^n + y \cdot t^r + x, \qquad t^{r-1}(m \cdot t^{m-r} + nzt^{n-r} + y),$$

ist also gleich dem Produkt der Resultante von

$$rt^m + rzt^n + yt^r + x, \qquad t^{r-1}$$

und der Resultante von

$$rt^m + rzt^n + y \cdot t^r + x, \qquad mt^{m-r} + nzt^{n-r} \quad y.$$

Die erstere ist gleich x^{r-1}, die letztere bezeichnen wir mit Δ, so dass die Discriminantenfläche aus der $(r-1)$fach zu zählenden Ebene

$$x = 0$$

und der Fläche

$$\Delta = 0$$

besteht. Für die Diskussion derselben ist es zweckmässig, Δ nicht als Funktion von x, y, z auszudrücken, sondern die Fläche durch das System der beiden Gleichungen

$$rt^m + rzt^n + yt^r + x = 0$$
$$mt^{m-r} + nzt^{n-r} + y = 0$$

oder durch das äquivalente System

$$1) \quad \begin{cases} x = (n-r)zt^n + (m-r)t^m \\ y = -nzt^{n-r} - m \cdot t^{m-r} \end{cases}$$

darzustellen. Um alle reellen, nicht singulären Punkte der Fläche $\Delta = 0$ zu erhalten, hat man dem Parameter t alle reellen Werte beizulegen; der jeweilige Wert von t ist gleich der Doppelwurzel der dem Punkte (x, y, z) entsprechenden viergliedrigen Gleichung[1]).

Die „M_1 des Systems“[2]) ist der geometrische Ort des Schnittpunktes je dreier benachbarten Ebenen der Schar

---

$$r \cdot t^{\frac{m}{\vartheta}} + r \cdot zt^{\frac{n}{\vartheta}} + y \cdot t^{\frac{r}{\vartheta}} + x = 0,$$

und falls Θ gerade, doppelt soviel reelle Wurzeln als letztere Gleichung positive Wurzeln besitzt. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass m, n, r nicht durch ein und dieselbe Zahl teilbar sind, sobald wir für jede viergliedrige Gleichung, welche diese Bedingung erfüllt, nicht nur die Anzahl der reellen, sondern speziell auch die der positiven Wurzeln bestimmen.

1) cf. pag. 8.

2) cf. pag. 5.

$$rt^m + rzt^n + yt^r + x = 0.$$

Die drei dem Werte $t = 0$ entsprechenden aufeinanderfolgenden Ebenen fallen, wenn $r > 2$, in der Ebene $x = 0$ zusammen und schneiden sich, wenn $r = 2$ oder $r = 1$, $n > 2$ in der Geraden $x = 0$, $y = 0$. Abgesehen von dieser Ebene resp. dieser Geraden besteht die M_1 des Systems aus der durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= -\frac{(m-r)(m-n)}{n} t^m \\ 2) \quad y &= \frac{m(m-n)}{n-r} t^{m-r} \\ z &= -\frac{m(m-r)}{n(n-r)} t^{m-n} \end{aligned}$$

bestimmten Kurve. Dieselbe ist die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche $\triangle = 0$. Jedem reellen Werte t (aber keinem imaginären [1])) entspricht zufolge der Gleichungen 2) ein reeller Punkt der Kurve; die demselben zugeordnete viergliedrige Gleichung hat den für t gewählten Wert zur dreifachen Wurzel.

Stationäre Punkte des Systems [2]) sind, falls $r > 3$,
alle Punkte der Ebene $x = 0$,
falls $r = 3$ oder $r = 2$, $n > 3$ oder $r = 1$, $n > 3$ alle Punkte der Geraden $x = 0$, $y = 0$;
sonst giebt es nur den einzigen stationären Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Für jede zu einem solchen gehörige Gleichung ist $t = 0$ eine wenigstens vierfach zu rechnende Wurzel.

Die Doppelkurve [3]) der abwickelbaren Fläche $\Delta = 0$ ist der Ort des Schnittpunktes zweier nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden, sich schneidenden Geraden der Schar

$$\begin{aligned} rt^m + rzt^n + yt^r + x &= 0 \\ mt^{m-r} + nzt^{n-r} + y &= 0, \end{aligned}$$

wird also durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} rt_1^m + rzt_1^n + yt_1^r + x &= 0 \\ mt_1^{m-r} + nzt_1^{n-r} + y &= 0 \\ rt_2^m + rzt_2^n + yt_2^r + x &= 0 \\ mt_2^{m-r} + nzt_2^{n-r} + y &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt, das auch in die Form

---

1) Denn nach Voraussetzung haben m, n, r keinen gemeinsamen Teiler.

2) cf. pag. 5.

3) Nach der Bezeichnungsweise pag. 7 die Mannigfaltigkeit (1, 1).

$$3)\quad \begin{aligned} &(n-r)\,z\,(t_1^n - t_2^n) + (m-r)\,(t_1^m - t_2^m) = 0 \\ &nz\,(t_1^{n-r} - t_2^{n-r}) + m\,(t_1^{m-r} - t_2^{m-r}) = 0 \\ &x = (n-r)\,z\,t_1^n + (m-r)\,t_1^m \\ &y = -\,nz\,t_1^{n-r} - m\,t_1^{m-r} \end{aligned}$$

gebracht werden kann. Man bekommt alle reellen Punkte der Doppelkurve, wenn man die Parameter t_1 und t_2 alle reellen, einander ungleichen und alle konjugiert komplexen[1]) Werte annehmen lässt, denen ein die Gleichungen 3) befriedigendes Wertsystem (x, y, z) entspricht. Die zu einem Punkte der Doppelkurve gehörigen Werte t_1, t_2 sind die beiden Doppelwurzeln der dem Punkt zugeordneten viergliedrigen Gleichung.

In jedem Punkte der Doppelkurve besitzt die abwickelbare Fläche $\varDelta = 0$ die beiden Tangentialebenen

$$\begin{aligned} r t_1^m + r z t_1^n + y t_1^r + x = 0 \\ r t_2^m + r z t_2^n + y t_2^r + x = 0, \end{aligned}$$

welche niemals identisch sind, da die Gleichungen

$$t_1^m = t_2^m;\; t_1^n = t_2^n;\; t_1^r = t_2^r$$

zufolge unserer Voraussetzung, dass m, n, r keinen gemeinsamen Teiler haben, nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Wenn t_1, t_2 reelle Werte haben, sind auch die Tangentialebenen reell: der Punkt gehört einem nicht isolierten Zweige der Doppelkurve an; haben t_1, t_2 konjugiert komplexe Werte, dann sind die Tangentialebenen imaginär: der Punkt liegt auf einem isolierten Zweige der Doppelkurve.

Im ersteren Falle ist auch der Quotient $\frac{t_2}{t_1} = k$ reell, im letzteren Falle ist k im allgemeinen eine komplexe Zahl vom absoluten Betrage 1; nur wenn t_1 und t_2 rein imaginär sind, hat k den reellen Wert -1.

Der grösste gemeinsame Teiler von m und n sei ϑ und

$$m = m_0\,\vartheta, \quad n = n_0\,\vartheta;$$

der grösste gemeinsame Teiler von $m - r$ und $n - r$ sei τ und

$$m - r = \nu\tau, \quad n - r = \mu\tau.$$

Bei Einführung dieser Bezeichnungen lassen sich die ersten beiden Gleichungen 3) pag. 14 in der Form

1) cf. pag. 8.

$$4)\quad \begin{aligned}(t_1^\vartheta - t_2^\vartheta)\left[(n-r)\,z\,\frac{t_1^n - t_2^n}{t_1^\vartheta - t_2^\vartheta} + (m-r)\,\frac{t_1^m - t_2^m}{t_1^\vartheta - t_2^\vartheta}\right] &= 0\\ (t_1^\tau - t_2^\tau)\left[nz\,\frac{t_1^{n-r} - t_2^{n-r}}{t_1^\tau - t_2^\tau} + m\,\frac{t_1^{m-r} - t_2^{m-r}}{t_1^\tau - t_2^\tau}\right] &= 0\end{aligned}$$

schreiben.

Indem man je einen Faktor der linken Seite der ersten Gleichung mit je einem Faktor der linken Seite der zweiten Gleichung zusammenfasst, erhält man aus 4) vier Gleichungssysteme:

$$\text{A)}\quad \begin{aligned} t_1^\vartheta - t_2^\vartheta &= 0\\ t_1^\tau - t_2^\tau &= 0\end{aligned}$$

Da ϑ und τ keinen gemeinsamen Teiler haben (denn sonst besässen auch m, n, r einen solchen), genügt kein Paar von einander verschiedener Werte t_1, t_2 den beiden Gleichungen.

$$\text{B)}\quad t_1^\vartheta - t_2^\vartheta = 0$$

$$nz\cdot\frac{t_1^{n-r} - t_2^{n-r}}{t_1^\tau - t_2^\tau} + m\cdot\frac{t_1^{m-r} - t_2^{m-r}}{t_1^\tau - t_2^\tau} = 0$$

Ist $\vartheta = 1$, so fällt dieses Gleichungssystem fort; ist dagegen $\vartheta > 1$, so ergiebt sich

5)
$$z = -\frac{m}{n}\,t_1^{m-n};$$
die zugehörigen Werte x, y erhält man aus 3)
$$x = \frac{r}{n}(m-n)\,t_1^m$$
$$y = 0$$

Durch Elimination von t_1 gehen die Gleichungen 5) über in

$$6)\quad \begin{cases} x^{m_0-n_0} = \dfrac{n^{n_0}\cdot r^{m_0-n_0}\,(m-n)^{m_0-n_0}}{m^{m_0}}\cdot(-z)^{m_0}\\ y = 0.\end{cases}$$

Jedem Punkte des durch die Gleichungen 5) oder 6) dargestellten Zweiges der Doppelkurve entsprechen ϑ verschiedene Werte t_1, deren ϑ^{te} Potenzen sämtlich gleich ein und derselben rationalen Funktion von x und z sind[1]). Der Zweig ist eine ϑfache Kurve

1) Versteht man unter M, R zwei ganze Zahlen, die der Gleichung
$$R(m_0 - n_0) + M m_0 = 1$$
genügen, so ergiebt sich aus 5) pag. 15
$$t_1^\vartheta = \frac{n^{M+R}}{m^R\cdot r^M\,(m-n)^M}\cdot x^M\cdot(-z)^R.$$

der Fläche $\Delta = 0$. Wenn ϑ ungerade ist, so sind $\vartheta - 1$ der Werte imaginär und nur einer ist reell: in jedem Punkte der ϑfachen Kurve besitzt die Fläche 1 reelle und $\vartheta - 1$ imaginäre Tangentialebenen. Eine solche singuläre Linie unterscheidet sich für das Auge in nichts von irgend einer gewöhnlichen Kurve auf der Fläche, ist also für die Ermittelung der Gestalt der letzteren von keiner besonderen Bedeutung. Ist dagegen ϑ eine gerade Zahl, so gehören zu jedem Punkte der einen Hälfte[1]) der Kurve ϑ imaginäre, zu jedem Punkte der andern Hälfte[2]) 2 reelle und $\vartheta - 2$ imaginäre Werte t_1. Der erste Teil ist ein isolierter Zweig, der letzte stellt sich äusserlich, wie gross ϑ auch sei, als eine gewöhnliche, nichtisolierte Doppelkurve dar.

C) $t_1^\tau - t_2^\tau = 0$

$$(n - r)\, z \frac{t_1^n - t_2^n}{t_1^\vartheta - t_2^\vartheta} + (m - r) \frac{t_1^m - t_2^m}{t_1^\vartheta - t_2^\vartheta} = 0$$

Für $\tau > 1$ erhält man hieraus

$$z = -\frac{m - r}{n - r}\, t_1^{m-n}$$

7) Die Gleichungen 3) pag. 14 liefern die zugehörigen Werte

$$x = 0$$

$$y = \frac{r\,(m - n)}{n - r}\, t_1^{m-r}$$

Setzen wir $\nu - \mu = \varrho$, so resultiert durch Elimination von t_1 aus 7)

$$8) \quad y^\varrho = \frac{r^\varrho . (m - n)^\varrho . (n - r)^\mu}{(m - r)^\nu} \cdot (-z)^\nu$$

$$x = 0.$$

An dieses Gleichungssystem knüpfen sich die analogen Bemerkungen wie an 5) und 6) unter B)[3]).

---

1) Nämlich falls

m_0 gerade, n_0 ungerade, zu allen Punkten, für die $x > 0$, $z > 0$,
m_0 ungerade, n_0 ungerade, „ „ „ „ „ $x < 0$, $z < 0$,
m_0 ungerade, n_0 gerade, „ „ „ „ „ $x < 0$, $z > 0$.

2) Nämlich zu allen Punkten, für welche x positiv, z negativ ist.

3) $$t_1^\tau = \frac{(n - r)^{N+P}}{r^N (m - r)^P (m - n)^N} \cdot (-z)^P \cdot y^N,$$

wenn N, P zwei ganze Zahlen bedeuten, die der Gleichung

$$N\nu + P\varrho = 1$$

genügen. — Ist τ eine gerade Zahl, so bilden diejenigen Punkte der Kurve, für welche z negativ, y positiv ist, eine nicht isolierte Knotenlinie, die andern

$$\text{D)}\quad (n-r)\, z\, \frac{t_1^n - t_2^n}{t_1^\vartheta - t_2^\vartheta} + (m-r)\, \frac{t_1^m - t_2^m}{t_1^\vartheta - t_2^\vartheta} = 0$$

$$n \,.\, z\, \frac{t_1^{n-r} - t_2^{n-r}}{t_1^\tau - t_2^\tau} + m\, \frac{t_1^{m-r} - t_2^{m-r}}{t_1^\tau - t_2^\tau} = 0.$$

Damit beide Gleichungen durch denselben Wert von z befriedigt werden, muss zwischen t_1 und t_2 die Relation bestehen

$$\frac{m\,(n-r)\,(t_1^n - t_2^n)\,(t_1^{m-r} - t_2^{m-r}) - n\,(m-r)\,(t_1^m - t_2^m)\,(t_1^{n-r} - t_2^{n-r})}{(t_1^\vartheta - t_2^\vartheta)\,(t_1^\tau - t_2^\tau)} = 0,$$

welche wir auch, da der Zähler der linken Seite durch $(t_1 - t_2)^4$ teilbar ist, durch die Gleichung

$$9)\ \frac{m(n-r)(t_1^n - t_2^n)(t_1^{m-r} - t_2^{m-r}) - n(m-r)(t_1^m - t_2^m)(t_1^{n-r} - t_2^{n-r})}{(t_1^\vartheta - t_2^\vartheta)\,(t_1^\tau - t_2^\tau)\,(t_1 - t_2)^2} = 0$$

ersetzen können. Derselben genügt keine Wurzel von

$$t_1^\vartheta - t_2^\vartheta = 0$$

$$\text{oder}\quad t_1^\tau - t_2^\tau = 0.$$

Ist 9) erfüllt, so findet man

$$10)\ \begin{cases} z = -\dfrac{m-r}{n-r} \cdot \dfrac{t_1^m - t_2^m}{t_1^n - t_2^n} = -\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{t_1^{m-r} - t_2^{m-r}}{t_1^{n-r} - t_2^{n-r}} \\ \text{und dem entsprechend (aus 3) pag. 14)} \\ x = -(m-r)\, \dfrac{t_1^{m-n} - t_2^{m-n}}{t_1^n - t_2^n}\; t_1^n \,.\, t_2^n \\ y = m \cdot \dfrac{t_1^{m-n} - t_2^{m-n}}{t_1^{n-r} - t_2^{n-r}} \cdot t_1^{n-r}\, t_2^{n-r}. \end{cases}$$

Die Substitution

$$t_2 = k t_1 \;^{1)}$$

führt 9) und 10) resp. über in

$$11)\ \frac{m(n-r)(k^n - 1)(k^{m-r} - 1) - n(m-r)(k^m - 1)k^{n-r} - 1)}{(k^\vartheta - 1)\,(k^\tau - 1)\,(k-1)^2} = \Phi(k) = 0$$

und

---

d. h. falls ν gerade, ϱ ungerade die mit positivem z und positivem y, falls ν ungerade, ϱ gerade die mit negativem z und negativem y, und falls ν ungerade, ϱ ungerade die mit positivem z und negativem y, erfüllen einen isolierten Zweig.

1) cf. pag. 14.

$$12) \begin{cases} z = -\frac{m-r}{n-r} \cdot \frac{k^m - 1}{k^n - 1} t_1^{m-n} = -\frac{m}{n} \cdot \frac{k^{m-r}-1}{k^{n-r}-1} t_1^{m-n} \\ x = -(m-r) k^n \frac{k^{m-n}-1}{k^n - 1} t_1^m \\ y = m k^{n-r} \frac{k^{m-n}-1}{k^{n-r}-1} t_1^{m-r}. \end{cases}$$

Durch Elimination von t_1 aus 12) ergeben sich die Gleichungen des jetzt betrachteten Teiles der Doppelkurve in der Gestalt[1])

$$13) \begin{cases} (-x)^{m_0 - n_0} = \frac{(n-r)^{m_0}}{(m-r)^{n_0}} \cdot k^{n(m_0 - n_0)} \cdot \frac{(k^n - 1)^{n_0} \cdot (k^{m-n}-1)^{m_0 - n_0}}{(k^m - 1)^{m_0}} \cdot (-z)^{m_0} \\ y^\rho = \frac{n^\nu}{m^\mu} \cdot k^{\rho(n-r)} \cdot \frac{(k^{m-n}-1)^\rho \cdot (k^{n-r}-1)^\mu}{(k^{m-r}-1)^\nu} \cdot (-z)^\nu \end{cases}$$

---

1) Vorausgesetzt, dass nicht gleichzeitig

$$k^m = 1 \text{ und } k^r = 1$$

oder gleichzeitig

$$k^n = 1 \text{ und } k^r = 1.$$

Bezeichnet man im ersteren Falle den grössten gemeinsamen Teiler von m, r mit δ und setzt

$$m = m'\delta, \; r = r'\delta,$$

so erhält man

$$z = 0$$
$$x = (m-r) \, t_1^m$$
$$y = -m t_1^{m-r},$$

woraus durch Elimination von t_1 folgt

$$z = 0$$
$$\left(\frac{x}{m-r}\right)^{m'-r'} = \left(-\frac{y}{m}\right)^{m'}.$$

Von dieser Kurve gilt das Analoge wie von Kurve 6). Falls δ eine gerade Zahl ist, so stellt die im Raume $x > 0$, $y < 0$ verlaufende Hälfte eine eigentliche Knotenlinie dar, während die andere Hälfte, die,

wenn m' gerade, r' ungerade in $x > 0$, $y > 0$,
„ m' ungerade, r' „ „ $x < 0$, $y < 0$ und
„ m' „ r' gerade „ $x < 0$, $y > 0$

liegt, eine isolierte Linie ist.

Einer von 1 verschiedenen, den beiden Gleichungen

$$k^n = 1 \text{ und } k^r = 1$$

gemeinsamen Wurzel k entspricht keine im Endlichen liegende Doppelkurve.

Jeder reellen Wurzel k der Gleichung 11) entspricht ein nichtisolierter, jeder komplexen Wurzel vom absoluten Betrage 1 ein isolierter Zweig der Doppelkurve; ist speziell

$$\Phi(-1) = 0,$$

so entspricht der Wurzel $k = -1$ ein zur Hälfte isolierter, zur Hälfte nichtisolierter Zweig. Da die beiden zu einem Punkte der Doppelkurve gehörigen Werte t_1, t_2 mit einander vertauscht werden können, sind jedem Zweige zwei zu einander reciproke Wurzeln von 11) zugeordnet.

Damit auch für jede komplexe Wurzel vom absoluten Betrage 1 die Gleichungen der Doppelkurve in reeller Gestalt erscheinen, setzen wir

$$k = e^{2\varphi i},$$

so dass wir erhalten

$$14) \quad \begin{cases} (-x)^{m_0-n_0} = \dfrac{(n-r)^{m_0}}{(m-r)^{n_0}} \cdot \dfrac{(\sin n\,\varphi)^{n_0} \,.\, (\sin \overline{m-n}\,\varphi)^{m_0-n_0}}{(\sin m\,\varphi)^{m_0}} \cdot (-z)^{m_0} \\[2ex] y^{\varrho} = \dfrac{n^{\nu}}{m^{\mu}} \cdot \dfrac{[\sin(m-n)\,\varphi]^{\varrho} \,.\, [\sin(n-r)\,\varphi]^{\mu}}{[\sin(m-r)\,\varphi]^{\nu}} \cdot (-z)^{\nu} \end{cases}$$

Die Bedingungsgleichung für φ ergiebt sich aus 11) in folgenden Formen

$$15) \quad \begin{cases} \dfrac{m(n-r)\sin n\,\varphi \cdot \sin(m-r)\,\varphi - n(m-r)\sin m\,\varphi \cdot \sin(n-r)\,\varphi}{\sin\vartheta\varphi \cdot \sin\tau\varphi \cdot \sin^2\varphi} = 0 \\ \text{oder} \\ \dfrac{n(m-r)\sin r\,\varphi \cdot \sin(m-n)\,\varphi - r(m-n) \cdot \sin n\,\varphi \cdot \sin(m-r)\,\varphi}{\sin\vartheta\varphi \cdot \sin\tau\varphi \cdot \sin^2\varphi} = 0 \\ \text{oder} \\ \dfrac{m(n-r)\sin r\,\varphi \cdot \sin(m-n)\,\varphi - r(m-n)\sin m\,\varphi \cdot \sin(n-r)\,\varphi}{\sin\vartheta\varphi \cdot \sin\tau\varphi \cdot \sin^2\varphi} = 0 \\ \text{oder auch} \\ \dfrac{m(n-r)\cos(-m+n+r)\,\varphi - n(m-r)\cos(m-n+r)\,\varphi + r(m-n)\cos(m+n-r)\,\varphi}{\sin\vartheta\varphi \cdot \sin\tau\varphi \cdot \sin^2\varphi} = 0 \end{cases}$$

Die Gleichungen 14) stellen, sobald in ihnen für φ eine reelle Wurzel einer der Gleichungen 15) eingesetzt wird, einen isolierten Zweig der Doppelkurve dar.

Die Beschaffenheit der Doppelkurve und der Rückkehrkante und demzufolge auch die Gestalt der abwickelbaren Fläche $\Delta = 0$ hängt davon ab, ob die Zahlen m, n, r gerade oder ungerade sind. Da sie nach unserer Voraussetzung keinen gemeinsamen

Teiler haben, können sie nicht sämtlich gerade sein. Die viergliedrige Gleichung

$$rt^m + rzt^n + yt^r + x = 0,$$

in welcher m und r ungerade sind, n gerade ist, hat, wie man durch Anwendung der Kartesischen Zeichenregel erkennt, entweder eine oder drei reelle Wurzeln, so dass das Vorzeichen der Discriminante zur Bestimmung der Anzahl derselben ausreicht. Es bleiben uns demnach zur näheren Untersuchung die 6 Fälle übrig:

$$\left.\begin{array}{lll} m \equiv 0, & n \equiv 0, & r \equiv 1 \\ m \equiv 0, & n \equiv 1, & r \equiv 0 \\ m \equiv 1, & n \equiv 1, & r \equiv 0 \\ m \equiv 1, & n \equiv 1, & r \equiv 1 \\ m \equiv 1, & n \equiv 0, & r \equiv 0 \\ m \equiv 0, & n \equiv 1, & r \equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{2}.$$

III.

m gerade, n gerade, r ungerade.

ϑ ist eine gerade Zahl; die Gleichungen 5) oder 6) stellen also eine zur einen Hälfte isolierte, zur andern nichtisolierte Doppelkurve dar. Um nachzuweisen, dass es ausserhalb dieser Linie auf der Fläche $\Delta = 0$ keinen Punkt giebt, dem 2 von einander verschiedene, reelle Werte t entsprechen, fassen wir die Kurve ins Auge, welche von einer beliebigen zur xy Ebene parallelen Ebene aus der Fläche ausgeschnitten wird und deren Gleichungen lauten

$$x = (n - r)\, z t^n + (m - r) t^m$$
$$y = -\, n z t^{n-r} - m t^{m-r},$$

wo z eine Konstante bedeutet.

Für jeden Punkt der Schnittfigur ist

$$\frac{dx}{dt} = t^{n-1} \left[n\,(n - r)\, z + m\,(m - r)\, t^{m-n} \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = -\, t^{n-r-1} \left[n\,(n - r)\, z + m\,(m - r)\, t^{m-n} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\, \frac{1}{t^r}.$$

Wenn

$$z \geqq 0,$$

so ist für alle Werte t

$$\frac{dy}{dt} < 0$$

$$\left(\text{nur für } t = 0 \text{ ist } \frac{dy}{dt} = 0\right).$$

Demnach können nicht zwei verschiedene reelle Werte t denselben Wert y liefern.

Für den Fall

$$z < 0$$

bezeichnen wir die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$n(n-r)z + m(m-r)t^{m-n} = 0$$

mit T[1]).

Da die nach t genommene Ableitung der Funktion

$$x + T^r y$$

für $t = T$ verschwindet, für alle übrigen positiven Werte von t aber positiv ist, und da ebenso die Ableitung der Funktion

$$x - T^r y$$

für $t = -T$ null, für alle andern negativen Werte von t aber negativ ist, können ein und demselben Punkte (x, y) nicht 2 verschiedene positive oder 2 verschiedene negative Werte t entsprechen.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob resp. wo der zu den positiven Werten von t gehörende Teil P und der zu den negativen Werten von t gehörige Teil N der Kurve einander schneiden.

Der einzige positive Wert von t, für welchen y verschwindet, ist

$$t_0 = \left(-\frac{n}{m} z\right)^{\frac{1}{m-n}};$$

ihm entspricht die Abscisse

$$x_0 = \frac{r(m-n)}{n} t_0^m$$

(also $x_0 > 0$).

1) Den Parameterwerten T und $-T$ entsprechen die beiden Spitzen der Kurve (die Schnittpunkte der Ebene und der Rückkehrkante); cf. Gleichungen 2) pag. 13.

Die Koordinaten der $t = T$ entsprechenden Spitze mögen X, Y heissen.

Wächst t von 0 bis T, so nimmt

x von 0 bis X ab,
y von 0 bis Y zu;

wächst t von T bis t_0, so nimmt

x von X bis x_0 zu,
y von Y bis 0 ab;

wächst t von t_0 bis ∞, so nimmt

x von x_0 ins Unendliche zu,
y von 0 ins Unendliche ab.

Also ist im Zweige P,

wenn $X \leqq x < x_0$, $y > 0$
" $x = x_0$, $y = 0$
" $x > x_0$, $y < 0$.

In derselben Weise ergiebt sich für den Zweig N:

wenn $X \leqq x < x_0$, ist $y < 0$
" $x = x_0$, " $y = 0$
" $x > x_0$, " $y > 0$.

Demnach haben P und N (ausser dem Koordinatenanfang) nur den Punkt

$$x = x_0,\ y = 0,$$

d. h. den Schnittpunkt der zur xy Ebene parallelen Ebene und der durch Gleichungen 6) dargestellten Doppelkurve gemeinsam, so dass hiermit nachgewiesen ist, dass es ausserhalb dieser singulären Linie auf der Fläche $\Delta = 0$ keinen Punkt giebt, in dem die letztere mehr als eine reelle Tangentialebene besitzt[1]).

Der nichtisolierte Teil der Doppelkurve, die Rückkehrkante und dem zufolge auch die ganze Fläche $\Delta = 0$ ohne ihre isolierten Linien haben für alle zulässigen Wertsysteme m, n, r im wesentlichen dieselbe Gestalt. Die Beschaffenheit der isolierten Kurven, welche von den reellen Wurzeln der Gleichung 15) abhängt, kann dagegen variieren. Da aber einerseits die isolierten Kurven nicht Gebiete verschiedener Art von einander trennen und andererseits der uns interessierende Teil der gesamten Doppelkurve für

1) Die Gleichung $\Phi(k) = 0$ kann also keine reelle Wurzel besitzen.

sich durch ein algebraisches Gleichungssystem dargestellt ist[1]), bedarf es einer Untersuchung der isolierten Linien nicht.

Um uns eine Vorstellung von der Gestalt der Fläche zu verschaffen, konstruieren wir[2]) die Schnittkurven der Fläche und der Ebenen

$$z = 10,\ z = 0,\ z = -10$$

unter der Voraussetzung

$$m = 6,\ n = 2,\ r = 1.$$

Die Fläche $\Delta = 0$ teilt den Raum $z > 0$ in die beiden Gebiete A und B, welche sich in die untere Hälfte des Raumes fortsetzen, wo zu ihnen noch ein drittes Gebiet, C, hinzutritt. Da, den Fall $r = 1$ ausgenommen, die Ebene $x = 0$ einen Bestandteil der Discriminantenfläche bildet, könnten die Gebiete A_1, A_2, A_3, in welche A von dieser Ebene zerlegt wird, und ebenso die Gebiete C_1, C_2, C_3, in welche C von ihr geteilt wird, in Bezug auf die Anzahl reeller Wurzeln der zu ihnen gehörigen Gleichungen von verschiedenem Charakter sein.

Dem Punkte $x = -1$, $y = 0$, $z = 0$ und folglich jedem Punkte des Gebietes A_1 entspricht eine Gleichung mit 2 reellen Wurzeln. Die sämtlichen Gleichungen in B haben, ebenso wie

$$rt^m + 1 = 0,$$

0 reelle Wurzeln. Da man durch Passieren eines nicht singulären Punktes der Discriminantenfläche aus B sowohl nach A_2, als auch nach A_3 gelangen kann, gehören diesen letzteren Gebieten nur Gleichungen mit 2 reellen Wurzeln an[3]). Dem in C_1 liegenden Punkte $x = r$, $y = 0$, $z = -3$ ist eine viergliedrige Gleichung mit 4 reellen Wurzeln zugeordnet. Man überzeugt sich leicht, dass es im Raume $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$ und im Raume $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$ Gleichungen mit 4 reellen Wurzeln giebt, die sich nur in den Gebieten C_2 resp. C_3 befinden können. Die Ebene $x = 0$ teilt demnach A, B, C nicht in Gebiete verschiedener Art. Verstehen wir unter der Discriminante D, auch dem Vorzeichen nach, das Produkt der Quadrate der Wurzeldifferenzen, so ist A durch die Ungleichung

---

1) Nämlich durch 5) oder 6).

2) Siehe die Figg. I, II, III auf der am Ende beigefügten Tafel.

3) cf. Kronecker, Über Sturmsche Funktionen. Monatsberichte der Berliner Akademie vom 14. Februar 1878.

$$(-1)^{\frac{m}{2}} . D < 0$$

oder

$$(-1)^{\frac{m}{2}} . \Delta < 0$$

vollständig charakterisiert, während für B und C

$$(-1)^{\frac{m}{2}} D > 0 \text{ oder } (-1)^{\frac{m}{2}} \Delta > 0$$

ist.

Zur Scheidung dieser beiden Gebiete bedarf es einer algebraischen Fläche, welche durch den nichtisolierten Teil der Doppelkurve[1]) hindurchgeht, wie z. B. der Cylinder

$$F = x^{m_0 - n_0} - \frac{n^{n_0} . r^{m_0 - n_0} (m-n)^{m_0 - n_0}}{m^{m_0}} . (-z)^{m_0} = 0,$$

der aber, wie jede derartige Fläche, auch die isolierte Hälfte der Kurve 6) enthält. Wenn die letztere in einem der Gebiete B, C verläuft, so tritt natürlich auch die Cylinderfläche in B resp. C ein, so dass nur ein Teil von ihr zur Trennung der Gebiete zu verwenden ist. Da die Lage des isolierten Zweiges von 6) eine verschiedene ist, je nachdem m_0, n_0 gerade oder ungerade sind[2]), unterscheiden wir 3 Fälle:

1. m_0 gerade, n_0 ungerade.

Im Raume $z < 0$ schneidet der Cylinder die Fläche $\Delta = 0$ nur in dem nichtisolierten Teil der Doppelkurve und verläuft sonst gänzlich in A; im Raume $z > 0$ dagegen dringt er in das Innere von B ein; zur Scheidung der Gebiete B und C kann also nur die in $z < 0$ liegende Hälfte von $F = 0$ benutzt werden. Die drei Gebiete lassen sich demgemäss in folgender Weise charakterisieren:

A (2 reelle Wurzeln): $(-1)^{\frac{m}{2}} . \Delta < 0$;

B (0 reelle Wurzeln): $(-1)^{\frac{m}{2}} . \Delta > 0,\ z > 0$

$(-1)^{\frac{m}{2}} . \Delta > 0,\ z < 0,\ F > 0$;

C (4 reelle Wurzeln): $(-1)^{\frac{m}{2}} . \Delta > 0,\ z < 0,\ F < 0$.

1) cf. Gleichungen 5) und 6), pag 15.

2) cf. Anmerkung 1) pag. 16.

2. m_0 ungerade, n_0 ungerade.

Der Cylinder besitzt keinen Punkt in $z>0$. Im Raume $z<0$, $x>0$ hat er mit $\Delta=0$ nur den nichtisolierten Teil der Doppelkurve gemeinsam; in $z<0$, $x<0$ schneidet er $\Delta=0$ (tritt also in C ein) oder nicht, je nachdem

$$r^{m_0-n_0}<\frac{(n-r)^{m_0}}{(m-r)^{n_0}}$$

oder

$$r^{m_0-n_0}\geqq\frac{(n-r)^{m_0}}{(m-r)^{n_0}}.$$

Im ersteren Falle hat man für die drei Gebiete die Bestimmungen

$$A:\quad (-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta<0,$$

$$B:\quad (-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta>0,\ F>0,\ x>0,$$

$$C:\quad (-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta>0,\ F<0,$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta>0,\ F>0,\ x<0;$$

im letzteren Falle reichen 2 Funktionen für die Trennung aus:

$$A:\quad (-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta<0,$$

$$B:\quad (-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta>0,\ F>0,$$

$$C:\quad (-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta>0,\ F<0.$$

3. m_0 ungerade, n_0 gerade.

Der Cylinder schneidet in $z<0$, $x>0$ die Fläche $\Delta=0$ nur in dem nichtisolierten Teil der Doppelkurve, in $z>0$, $x<0$ nur in der isolierten Hälfte derselben, indem er beständig im Gebiete A bleibt.

In A ist $(-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta<0$,

„ B „ $(-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta>0,\ F>0$,

„ C „ $(-1)^{\frac{m}{2}}.\,\Delta>0,\ F<0$.

Innerhalb der Gebiete A und C kann sich die Anzahl der positiven Wurzeln einer Gleichung nur beim Überschreiten der Ebene $x=0$ ändern. Alle Gleichungen in jedem der Gebiete

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ C_1,\ C_2,\ C_3$$

besitzen demnach gleich viel positive Wurzeln, nämlich resp.

$$1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 3,\ 1.$$

IV.

m gerade, n ungerade, r gerade.

Da ϑ und τ ungerade Zahlen sind, ist weder ein Teil der Kurve 6) noch ein Teil der Kurve 8) eine eigentliche Knotenlinie. Dagegen ist δ gerade und infolgedessen die Kurve

$$z=0$$
$$\left(\frac{x}{m-r}\right)^{m'-r'}=\left(\frac{-y}{m}\right)^{m'}$$

zur einen Hälfte eine isolierte, zur andern Hälfte eine nichtisolierte Doppellinie[1]). Auf ähnlichem Wege wie in III. erkennt man, dass die Fläche $\Delta=0$ in keinem Punkte ausserhalb dieser Kurve zwei reelle Tangentialebenen besitzt. Um eine Vorstellung von der Gestalt der Fläche und der Gebiete zu bekommen, in welche sie den Raum teilt, ist es dieses Mal vorteilhafter, Schnitte parallel zur xz-Ebene zu legen. Die Figg. IV, V, VI auf der Tafel stellen die Kurven dar, welche die Ebenen $y=9$, $y=0$, $y=-9$ aus $\Delta=0$ ausschneiden, und zwar für die Werte $m=6$, $n=3$, $r=2$. Durch die Fläche $\Delta=0$ und die Ebene $x=0$ wird der gesamte Raum in die 7 Gebiete A_1, A_2, A_3, B, C_1, C_2, C_3 geteilt. Indem man die Anzahl reeller Wurzeln irgend einer Gleichung in jedem dieser Gebiete ermittelt, findet man, dass die Gleichungen in B null, die in A_1, A_2, A_3 zwei, die in C_1, C_2, C_3 vier reelle Wurzeln haben. A (d. h. A_1, A_2, A_3 zusammengenommen) ist durch die Ungleichung

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\,.\,D<0$$

vollkommen charakterisiert. Die Gebiete B und C (d. h. C_1, C_2, C_3 zusammengenommen), in welchen beiden

---

1) cf. Anmerkung 1) pag. 18.

$$(-1)^{\frac{m}{2}}.D > 0,$$

werden im Raume $y > 0$ durch die Ebene $x = 0$ und im Raume $y < 0$ durch die Cylinderfläche

$$F = \left(\frac{x}{m-r}\right)^{m'-r'} - \left(-\frac{y}{m}\right)^{m'} = 0$$

getrennt, die $\varDelta = 0$ in der Kurve 16) schneidet und in $y < 0$ sonst gänzlich innerhalb des Gebietes A verläuft.

Die drei Gebiete sind demnach in folgender Weise zu unterscheiden:

für A (2 reelle Wurzeln) ist

$$(-1)^{\frac{m}{2}}.D < 0;$$

für B (0 reelle Wurzeln) ist

$$(-1)^{\frac{m}{2}}.D > 0,\ y > 0,\ x > 0$$

$$\text{oder}\ (-1)^{\frac{m}{2}}.D > 0,\ y < 0,\ F > 0;$$

für C (4 reelle Wurzeln) ist

$$(-1)^{\frac{m}{2}}.D > 0,\ x < 0$$

$$\text{oder}\ (-1)^{\frac{m}{2}}.D > 0,\ y < 0,\ F < 0.$$

Da man leicht erkennt, dass den Gleichungen

in A_1, A_2, A_3, C_1, C_2, C_3
resp. 1, 0, 2, 2, 1, 3

positive Wurzeln zukommen, sind hiernach die Kriterien auch für die Anzahl dieser sofort anzugeben. Die viergliedrige Gleichung besitzt

0 positive Wurzeln, wenn

$$(-1)^{\frac{m}{2}}.D > 0,\ y > 0,\ x > 0$$

$$\text{oder}\ (-1)^{\frac{m}{2}}.D > 0,\ y < 0,\ F > 0$$

$$\text{oder}\ (-1)^{\frac{m}{2}}.D < 0,\ x > 0,\ z > 0;$$

1 positive Wurzel, wenn

$$(-1)^{\frac{m}{2}}.D < 0,\ x < 0$$

$$\text{oder}\quad y > 0,\ x < 0,\ z > 0;$$

2 positive Wurzeln, wenn

$$(-1)^{\frac{m}{2}} . D < 0, \; x > 0, \; z < 0$$

$$\text{oder } (-1)^{\frac{m}{2}} . D > 0, \; y < 0, \; F < 0$$

und 3 positive Wurzeln, wenn

$$(-1)^{\frac{m}{2}} . D > 0, \; x < 0, \; z < 0.$$

V.

m ungerade, n ungerade, r gerade.

Legt man dem z irgend einen positiven Wert (oder auch den Wert 0) bei, so ist für alle Werte von t

$$\frac{dx}{dt} > 0, \qquad \frac{dy}{dt} < 0,$$

nur für $t = 0$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ und (wenn } n > r + 1) \frac{dy}{dt} = 0.$$

Ist z gleich einer beliebig gewählten negativen Zahl und bezeichnet man die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$n(n-r)z + m(m-r)t^{m-n} = 0$$

mit T[1]), so ist die nach t genommene Ableitung der Funktion

$$x + T^r y$$

beständig positiv, null nur für

$$t = -T, \; 0, \; T.$$

Die Fläche $\varDelta = 0$ besitzt demnach nirgends einen Knotenpunkt.

Figg. VII und VIII der Tafel sind die Schnittlinien dieser Fläche und der Ebenen $z = 10$, $z = -10$ für $m = 7$, $n = 5$, $r = 2$.

Die Fläche $\varDelta = 0$ und die Ebene $x = 0$ teilen den Raum in die Gebiete: A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Die Gleichungen in A (d. h. $A_1 + A_2$) besitzen 3, die in B (d. h. $B_1 + B_2$) 1, die in C (d. h. $C_1 + C_2$) 5 reelle Wurzeln.

Um im Raume $z < 0$ die beiden Gebiete B und C, in denen

---

1) Den Werten T und $-T$ des Parameters t entsprechen die beiden Spitzen der Kurve, die von der betreffenden Parallelebene zur xy-Ebene aus $\varDelta = 0$ ausgeschnitten wird. cf. Gleichungen 2) pag. 13.

die Discriminante dasselbe Vorzeichen hat, von einander zu trennen, bedienen wir uns der Fläche

$$G = x^{\varrho_o} - (-y)^{\varrho_o} \cdot \left(-\frac{n(n-r)}{m(m-r)} z\right)^{r_o} = 0,$$

wo

$$r_o = \frac{r}{\eta}, \qquad \varrho_o = \frac{m-n}{\eta}$$

ist und η den grössten gemeinsamen Teiler von r und $m-n$ bedeutet.

Jede Ebene, in welcher z einen konstanten Wert hat, schneidet $\Delta = 0$ in einer Kurve mit 2 Spitzen und $G = 0$, falls

$$\varrho_o \equiv 1 \pmod{2},$$

allein in der Geraden

$$\frac{y}{x} = -\left(-\frac{m(m-r)}{n(n-r)z}\right)^{\frac{r}{m-n}}$$

oder

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{T^r},$$

d. h. in der zu den Tangenten in den beiden Spitzen durch den Koordinatenanfang gehenden Parallelen; falls

$$\varrho_o \equiv 0 \pmod{2},$$

ausser in der eben genannten Geraden noch in der in Bezug auf die y-Achse zu ihr symmetrischen

$$\frac{y}{x} = \left(-\frac{m \cdot (m-r)}{n(n-r)z}\right)^{\frac{r}{m-n}}$$

oder

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{T^r}.$$

Der Abstand eines beliebigen Punktes der Ebene von der Geraden

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{T^r}$$

ist gleich

$$\frac{x + T^r \cdot y}{\sqrt{1 + T^{2r}}},$$

wenn unter $\sqrt{1 + T^{2r}}$ der positive Wert der Quadratwurzel verstanden und die Entfernung aller Punkte, die auf derselben Seite wie der Quadrant $x > 0$, $y > 0$ liegen, als positiv, die aller Punkte auf der entgegengesetzten Seite als negativ gerechnet wird.

Lässt man einen beweglichen Punkt die ganze von der Ebene aus $\varDelta = 0$ ausgeschnittene Kurve stetig durchlaufen, indem man t alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt, so nimmt der algebraische Wert seines Abstandes von der Geraden

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{T^r}$$

unaufhörlich zu, kann also nur einmal null werden, d. h. die Gerade schneidet die Kurve nur in dem Koordinatenanfang; sie trennt folglich in der Ebene die Gebiete B_1, C_1 von B_2, C_2.

Da B_1 und C_1 und ebenso B_2 und C_2 auf entgegengesetzten Seiten von $x = 0$ liegen, können wir die einzelnen Gebiete jetzt folgendermassen charakterisieren:

1. ϱ_0 ungerade.

$$A\colon (-1)^{\frac{m-1}{2}} . D < 0.$$

$$B\colon (-1)^{\frac{m-1}{2}} . D > 0,\ z > 0,$$

$$\text{oder } (-1)^{\frac{m-1}{2}} . D > 0,\ z < 0,\quad x . G > 0.$$

$$C\colon (-1)^{\frac{m-1}{2}} . D > 0,\ z < 0,\quad x . G < 0.$$

2. ϱ_0 gerade.

$$A\colon (-1)^{\frac{m-1}{2}} . D < 0.$$

$$B\colon (-1)^{\frac{m-1}{2}} . D > 0,\ z > 0.$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} . D > 0,\ z < 0,\ xy > 0.$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} . D > 0,\ z < 0,\ xy < 0,\ G > 0.$$

$$C\colon (-1)^{\frac{m-1}{2}} . D > 0,\ z < 0,\ xy < 0,\ G < 0.$$

Zur Aufstellung der Kriterien für die Zahl positiver Wurzeln genügt es zu wissen, dass die Gleichungen in B_2 null, in A_1 und B_1 eine, in A_2 und C_1 zwei, in C_2 drei positive Wurzeln haben.

VI.

Die drei Fälle

$$\left.\begin{array}{lll} m\equiv 1, & n\equiv 1, & r\equiv 1 \\ m\equiv 1, & n\equiv 0, & r\equiv 0 \\ m\equiv 0, & n\equiv 1, & r\equiv 1 \end{array}\right\} \pmod{2}$$

sind von den drei behandelten wesentlich verschieden.

Es seien zunächst m, n, r sämtlich ungerade Zahlen; alsdann ist ϑ, δ ungerade, τ gerade. Die Kurve 8) ist zur einen Hälfte eine Knotenlinie, zur andern eine isolierte Linie der Fläche $\Delta = 0$. Der Schnittpunkt des ersteren Teils und irgend einer Ebene, in welcher z einen konstanten negativen Wert hat, ist Knotenpunkt der von der Ebene aus $\Delta = 0$ ausgeschnittenen Kurve. Diese aber besitzt, wie man leicht sieht, ausserdem noch 2 Knotenpunkte, welche im Gebiete $y > 0$ symmetrisch zur y-Achse liegen[1]). Hieraus folgt, dass die Gleichung $\Phi(k) = 0$ zwei reelle, zu einander reciproke Wurzeln hat, denen zufolge Gleichungen 12) im Raume $z < 0$ ein nichtisolierter Zweig der Doppelkurve entspricht, welcher daselbst jede zu $z = 0$ parallele Ebene in den beiden erwähnten, zur y-Achse symmetrisch liegenden Knotenpunkten schneidet. Der Faktor zweiten Grades von $\Phi(k)$, der für die beiden reellen Wurzeln k verschwindet, gehört bei unbestimmten Werten von m, n, r nicht dem natürlichen Rationalitätsbereiche an; denn in dem speziellen Falle $m = 7$, $n = 5$, $r = 3$ ist

$$\Phi(k) = 3k^4 + 9k^3 + 11k^2 + 9k + 3$$

und der betreffende Faktor zweiten Grades

$$k^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}\right)k + 1.$$

Der nichtisolierte Teil der Doppelkurve lässt sich demnach nicht für sich durch ein Gleichungssystem darstellen, so dass jede algebraische Fläche, welche ihn enthält, auch durch die isolierten Linien hindurchgeht, die den komplexen Wurzeln vom absoluten Betrage 1 von $\Phi(k) = 0$ entsprechen. Eine derartige Fläche, deren Gleichung nicht in entwickelter Form gegeben werden kann, sondern nur in Gestalt eines über die sämtlichen Wurzeln von $\Phi(k) = 0$, resp. falls $\Phi(k)$ reduktibel sein sollte, über die Wurzeln

---

1) Siehe die Figg. IX und X auf der am Ende beigefügten Tafel.

desjenigen irreduktiblen Faktors von $\Phi(k)$ zu erstreckenden Produktes, der für die beiden reellen Wurzeln verschwindet, z. B. die Fläche[1])

$$\prod_{(k)}\left(x^{m_0-n_0}+\frac{(n-r)^{m_0}}{(m-r)^{n_0}}\cdot k^{n(m_0-n_0)}\cdot\frac{(k^n-1)^{n_0}\cdot(k^{m-n}-1)^{m_0-n_0}}{(k^m-1)^{m_0}}z^{m_0}\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

ist nicht in ihrer ganzen Ausdehnung zur Trennung des Gebietes von Gleichungen mit einer und des Gebietes von Gleichungen mit fünf reellen Wurzeln zu brauchen. Um den Teil der Fläche, der in das Innere dieser Gebiete eintritt, abzusondern, bedarf es einer neuen Fläche, welche die Knotenlinien von den isolierten Linien scheidet. Während nun aber die eigentliche Fläche $\Delta=0$ wie ihre Rückkehrkante und Knotenlinie, welche ungeraden Werte m, n, r auch haben mögen, im wesentlichen dieselbe Gestalt besitzt, ist die Lage der isolierten Linien veränderlich und ihre Abhängigkeit von m, n, r sehr kompliziert[2]), so dass es bei unbestimmten Werten von m, n, r kaum möglich sein dürfte, eine Fläche anzugeben, die den isolierten Teil der Doppelkurve von dem nichtisolierten trennt[3]).

Dass und wie sich die Trennung bei gegebenen Werten von m, n, r bewerkstelligen lässt, wollen wir an einem Beispiele zeigen, vorher aber die beiden Fälle:

$$\left.\begin{matrix} m\equiv 1, & n\equiv 0, & r\equiv 0 \\ m\equiv 0, & n\equiv 1, & r\equiv 1 \end{matrix}\right\}\text{(mod. 2)},$$

in denen der Sachverhalt ganz ähnlich ist, kurz besprechen.

Wenn m ungerade, n gerade, r gerade ist, so sind ϑ, τ, δ ungerade Zahlen. Da trotzdem jede Kurve ($\Delta=0$, $z=$ konst.) einen Knotenpunkt besitzt, muss $\Phi(k)=0$ zwei reelle, zu einander reciproke Wurzeln haben. Der Faktor zweiten Grades, den die-

---

1) cf. Gleichung 13) pag. 18.

2) Von m, n, r hängen nämlich zunächst die Anzahl und die Werte der reellen Wurzeln von 15) und von diesen zufolge Gleichungen 14) die Zahl und Lage der isolierten Linien ab.

3) Man erkennt allerdings leicht, dass für jeden Punkt einer Knotenlinie die Funktion $\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Delta}{\partial y^2}$ positiv, für jeden Punkt einer isolierten Linie negativ ist. Die Fläche $\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\Delta}{\partial y^2}=0$ ist aber für die Trennung nicht zu verwenden, weil ihre Lage zur Fläche $\Delta=0$ sich nicht bestimmen lässt.

selben zu null machen, gehört bei unbestimmten Werten von m, n, r nicht dem natürlichen Rationalitätsbereiche an, da es nicht der Fall ist für $m = 7$, $n = 4$, $r = 2$, wo

$$\Phi(k) = 3k^4 + 9k^3 + 11k^2 + 9k + 3$$

und der Faktor zweiten Grades

$$k^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{21}\right)k + 1$$

ist.

Wenn

$$m \text{ gerade, } n \text{ und } r \text{ ungerade,}$$

so sind ϑ, τ, δ ungerade Zahlen. Die Diskussion der Kurve ($\Delta = 0$, $z =$ konst.) lehrt, dass die Fläche $\Delta = 0$ eine Knotenlinie besitzt, welche die Ebene $z =$ konst. in 1 Punkte schneidet. Also auch in diesem Falle besitzt $\Phi(k) = 0$ zwei reelle, zu einander reciproke Wurzeln; der ihnen entsprechende Faktor zweiten Grades von $\Phi(k)$ gehört nicht zum natürlichen Rationalitätsbereiche; für $m = 8$, $n = 5$, $r = 3$ nämlich ist

$$\Phi(k) = 9k^6 + 36k^5 + 65k^4 + 80k^3 + 65k^2 + 36k + 9$$

und der Faktor zweiten Grades

$$k^2 + \frac{1}{3}(4 + \sqrt{10})k + 1.$$

Beispiel. $m = 11$, $n = 7$, $r = 5$.

Von einem Zahlenfaktor abgesehen ist

$$\Phi(k) = 10k^8 + 30k^7 + 49k^6 + 67k^5 + 73k^4 + 67k^3 + 49k^2 + 30k + 10.$$

Für $k = e^{2\varphi i}$ geht $\Phi(k) = 0$ über in

$$20\cos 8\varphi + 60\cos 6\varphi + 98\cos 4\varphi + 134\cos 2\varphi + 73 = 0,$$

oder, wenn $2\cos 2\varphi = \varepsilon$ gesetzt wird, in

$$10\varepsilon^4 + 30\varepsilon^3 + 9\varepsilon^2 - 23\varepsilon - 5 = 0.$$

In jedem der Intervalle

$$(-\infty \ldots -2), \quad \left(-\frac{3}{2} \ldots -1\right), \quad (-1 \ldots 0), \quad (0 \ldots +1)$$

liegt eine Wurzel ε dieser Gleichung. Der ersten entspricht kein reeller Wert von φ, den übrigen drei je zwei von gleichem absoluten Werte und entgegengesetztem Vorzeichen, also auch je zwei konjugiert komplexe Werte k vom absoluten Betrage 1.

Sind m, n, r beliebige ungerade Zahlen, so erstreckt sich zufolge der ersten Gleichung 14) die einer reellen Wurzel φ von 15) entsprechende isolierte Linie nur dann in den Raum $z < 0$, wenn $\sin m\varphi$ und $\sin n\varphi$ oder (was nach der ersten Gleichung 15) damit gleichbedeutend ist) wenn $\sin (m-r)\varphi$ und $\sin (n-r)\varphi$ gleiches Vorzeichen haben. Für unsere Werte von m, n, r ist

$$\frac{\sin (m-r)\varphi}{\sin (n-r)\varphi} = \frac{\sin 6\varphi}{\sin 2\varphi} = \varepsilon^2 - 1.$$

Demnach verlaufen die isolierten Linien, welche den Wurzeln ε in den Intervallen $(-1\ldots 0)$, $(0\ldots +1)$ zugeordnet sind, gänzlich im Raume $z > 0$, und nur die, welche der im Intervall $\left(-\frac{3}{2}\ldots -1\right)$ liegenden Wurzel entspricht, in $z < 0$. Jede Ebene, in welcher z einen konstanten negativen Wert hat, wird von der letzteren Kurve in zwei symmetrisch zur y-Achse gelegenen Punkten, den isolierten Punkten der Schnittlinie ($\Delta = 0$, $z =$ konst.), also von der Fläche

$$P = \prod_k \left(x^4 + \frac{2^4}{3^7}\, k^{28}\, \frac{(k^7-1)^7\,(k^4-1)^4}{(k^{11}-1)^{11}}\, z^{11}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

(das Produkt über alle Wurzeln k von $\Phi(k) = 0$ erstreckt) in vier Parallelen zur y-Achse geschnitten, von denen zwei die beiden Knotenpunkte und zwei die erwähnten isolierten Punkte der von der Ebene aus $\Delta = 0$ ausgeschnittenen Kurve enthalten.

Da nun bei beliebigen ungeraden Zahlen m, n, r

$$K = k^{n(m_0-n_0)} \cdot \frac{(k^n-1)^{n_0} \cdot (k^{m-n}-1)^{m_0-n_0}}{(k^m-1)^{m_0}}$$

für keinen reellen Wert von k grösser ist als

$$\frac{n^{n_0}\,(m-n)^{m_0-n_0}}{m^{m_0}}\ [1],$$

---

1) Diesen Wert nimmt K an für

$$k = 1,\ k = -a,\ k = -\frac{1}{a},$$

wenn $-a$ die einzige negative Wurzel der Gleichung

$$n_0 \cdot k^m - m_0\, k^n + m_0 - n_0 = 0$$

bedeutet. $\Phi(-a)$ und $\Phi\left(-\frac{1}{a}\right)$ sind stets von 0 verschieden.

so ist für die beiden Knotenpunkte

$$x^{m_0-n_0} < \frac{(n-r)^{m_0} \, . \, n^{n_0} \, . \, (m-n)^{m_0-n_0}}{(m-r)^{n_0} \, . \, m^{m_0}} \, . \, (-z)^{m_0},$$

d. h. die Abscissen der Knotenpunkte sind dem absoluten Werte nach kleiner als die der Spitzen.

Für denjenigen der drei Werte φ, für welchen ε im Intervall $\left(-\frac{3}{2} \ldots -1\right)$ liegt, ist

$$\frac{(\sin 7\,\varphi)^7 \, . \, (\sin 4\,\varphi)^4}{(\sin 11\,\varphi)^{11}} > \frac{7^7 \, . \, 4^4}{11^{11}};$$

folglich sind nach der ersten Gleichung 14) die Abscissen der isolierten Punkte dem absoluten Betrage nach grösser als die der Spitzen, so dass die Fläche $x^4 + \frac{2^{12} . 7^7}{3^7 . 11^{11}} \cdot z^{11} = 0$, welche jede Ebene, in der z einen konstanten negativen Wert hat, in den beiden durch die Spitzen der Schnittkurve ($z =$ konst., $\Delta = 0$) zur y-Achse gezogenen Parallelen schneidet, im Raum $z < 0$, $y > 0$ den isolierten Teil der Doppelkurve vom nichtisolierten trennt. Jetzt lassen sich leicht die verschiedenen Gebiete charakterisieren und somit die Kriterien für die Zahl der reellen Wurzeln angeben.

Die vorgelegte Gleichung hat

1 reelle Wurzel, wenn

$$D < 0, \; z > 0,$$

oder $D < 0, \; z < 0, \; P < 0,$

oder $D < 0, \; z < 0, \; P > 0, \; x^4 + \frac{2^{12} . 7^7}{3^7 . 11^{11}} z^{11} > 0,$

oder $D < 0, \; z < 0, \; P > 0, \; x^4 + \frac{2^{12} . 7^7}{3^7 . 11^{11}} z^{11} < 0, \; y^2 + \frac{2^2 . 5^2}{3^3} z^3 > 0;$

3 reelle Wurzeln, wenn

$$D > 0;$$

5 reelle Wurzeln, wenn

$$D < 0, \; z < 0, \; P > 0, \; x^4 + \frac{2^{12} . 7^7}{3^7 . 11^{11}} z^{11} < 0, \; y^2 + \frac{2^2 . 5^2}{3^3} z^3 < 0.$$

§ 3.

Die allgemeine Gleichung fünften Grades.

I.

Durch eine lineare Transformation mit reellen Koeffizienten lässt sich die Gleichung fünften Grades, deren sämtliche Koeffizienten unbestimmte reelle Grössen sind, auf die Form

$$t^5 + 10\,v\,t^3 + 10\,z\,t^2 + 5\,y\,t + x = 0$$

bringen, welche wir unseren Entwicklungen zu Grunde legen wollen.

In den 6 STURMschen Funktionen dieser Gleichung sind die Koeffizienten der höchsten Potenz von t, von stets positiven Faktoren abgesehen,

$$1, \quad 1, \quad -v, \quad S = 4\,y\,v - 24\,v^3 - 9\,z^2,$$
$$T = x^2\,v - 12\,x\,y\,z + 16\,y^3 - 32\,x\,z\,v^2 - 176\,y^2\,v^2 + 468\,y\,z^2\,v - 216\,z^4 + 480\,y\,v^4 - 320\,z^2\,v^3$$

und die Discriminante D[1]).

Die Anwendung des STURMschen Satzes auf die Gleichung 5. Grades lehrt, dass die 3 Gebiete G_0, G_1, G_2 in folgender Weise charakterisiert werden können:

für G_0 ist $D > 0, \quad T > 0, \quad S > 0, \quad v < 0;$
„ G_1 „ $D < 0;$
„ G_2 „
entweder $D > 0, \quad T < 0,$
oder $D > 0, \quad T > 0, \quad S < 0,$
oder $D > 0, \quad T > 0, \quad S > 0, \quad v > 0.$

Das STURMsche Verfahren erfordert also 4 Funktionen zur Trennung der Gebiete[2]).

---

1) Die Werte der Leitglieder der STURMschen Funktionen für die allgemeine Gleichung 5. Grades finden sich bei M. ROBERTS, Quarterly Journal, Bd. 4, pag. 168; A. CAYLEY, Philosophical Transactions, Bd. 147 (1857), pag. 735; SALMON-FIEDLER, Algebra der linearen Transformationen, 2. Aufl., pag. 313. Wie FIEDLER bemerkt, haben die 4. und die 5. Funktion bei CAYLEY falsches Vorzeichen; ausserdem ist in der 5. Funktion statt $-938\,a^2\,c\,d^2\,e$ zu lesen $-936\,a^2\,c\,d^2\,e$.

2) cf. SYLVESTER, Philosophical Transactions, Bd. 154, pag. 652. cf. auch die Anmerkung 1) pag. 9.

HERMITE[1]), SYLVESTER[2]) und CAYLEY[3]) haben die Kriterien für die Realität der Wurzeln durch die Fundamentalinvarianten der Form fünften Grades ausgedrückt. Während HERMITE sich einer rein algebraischen Methode bedient und zur Unterscheidung der drei möglichen Fälle 5 Funktionen nötig hat, nehmen SYLVESTER und CAYLEY geometrische Betrachtungen zu Hülfe, indem sie jede kanonische Form 5. Grades durch einen Punkt des Raumes repräsentieren, und bewirken die Trennung der Gebiete durch 3 Funktionen. Für die praktische Berechnung sind die auf diese Weise gefundenen Kriterien weniger zweckmässig als die, welche der STURMsche Satz liefert, weil die zu berechnenden Funktionen von viel höherem Grade in den Koeffizienten sind als die Ausdrücke S, T auf voriger Seite.

Noch weniger Funktionen als SYLVESTER und CAYLEY, nämlich nur 2, braucht SCHRAMM in der Abhandlung: „Les invariants et les covariants, en qualité de critères pour les racines d'une équation“[4]), in welcher Kriterien für die Anzahl reeller Wurzeln einer Gleichung von beliebigem Grade gegeben werden. Nach meiner Ansicht gelangt SCHRAMM durch fehlerhafte Entwicklungen zu falschen Resultaten. Er sucht Invarianten $J^{(r)}$ zu bilden, die

1. für $(r+1)$ Paare gleicher Wurzeln verschwinden,
2. für $2r$ oder weniger imaginäre Wurzeln positiv sind und
3. für $2r+2\sigma$ imaginäre Wurzeln das Vorzeichen $(-1)^\sigma$ haben.

Dass die von ihm aufgestellten Invarianten die unter 2) und 3) angeführten Eigenschaften besitzen, weist der Verfasser nur unter der Voraussetzung nach, dass die imaginären Bestandteile der Wurzeln unendlich gross sind und dehnt es dann ohne weiteres auf den Fall beliebiger Werte der imaginären Wurzeln aus. Auf diesem Wege findet er das allerdings sehr einfache Resultat, dass, wenn in der Reihe

$$J^{(0)} = D, \qquad J^{(1)}, \qquad J^{(2)}, \qquad J^{(3)}, \ldots$$

---

1) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Serie II, Bd. 9 (1854), pag. 198.

2) Philosophical Transactions, Bd. 154 (1864). Algebraical Researches, Part III.

3) „Eighth Memoir on Quantics.“ Philos. Transactions, Bd. 157 (1867).

4) Annali di Matematica, Serie II, Bd. 1, pag. 259; Bd. 3, pag. 41.

$J^{(r)}$ die letzte Invariante von negativem Vorzeichen ist, $2(r+1)$ Wurzeln imaginär sind, so dass also für die Gleichung n. Grades $\frac{1}{2}n$ resp. $\frac{1}{2}(n-1)$ Kriterien genügen würden, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die Gleichung 5. Grades hat demnach 5 reelle Wurzeln, wenn $D > 0$, $J^{(1)} > 0$; 3, wenn $D < 0$; 1, wenn $J^{(1)} < 0$. Der Verfasser fügt hinzu, dieses Resultat entspreche im allgemeinen dem von Herrn SYLVESTER gefundenen; nur dass dieser noch die Invariante J vom vierten Grade in dem Falle anwende, wo $J^{(1)}$ (oder nach SYLVESTERscher Bezeichnung Δ) verschwindet, um zu entscheiden, ob die beiden Paare gleicher Wurzeln reell oder imaginär seien. SYLVESTERs Worte[1]) besagen aber klar und deutlich, dass er die eben erwähnte Invariante J auch im Falle eines von 0 verschiedenen Δ braucht.

Uebrigens ist leicht a priori zu erkennen, dass es ausser der Discriminante gar keine Funktion der Koeffizienten giebt[2]), die für jede Anzahl imaginärer Wurzeln ein bestimmtes Vorzeichen hat.

Die Diskussion der Discriminantenmannigfaltigkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades wird uns als Kriterien für die Anzahl reeller Wurzeln drei Funktionen liefern, deren numerische Berechnung nicht weitläufiger ist als die der STURMschen Funktionen. Wir beginnen damit, dass wir die Gleichungen der Discriminantenmannigfaltigkeit und ihrer singulären Gebilde aus § 1 entnehmen, indem wir daselbst $i=4$ setzen und statt x_1, x_2, x_3, x_4 jetzt x, y, z, v schreiben.

II.

1. Die Discriminantenmannigfaltigkeit.

Die Discriminantenmannigfaltigkeit wird durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t^5 + 10vt^3 + 10zt^2 + 5yt + x &= 0, \\ t^4 + 6vt^2 + 4zt + y &= 0 \end{aligned}$$

1) When D is negative the equation has two imaginary roots. When D is positive the equation has no imaginary roots, provided the two criteria J and Δ are both negative; but if either of these is zero or positive, there are two pairs of imaginary roots. Philosophical Transactions, Bd. 154, pag. 641.

2) Abgesehen natürlich von den Funktionen, die das Produkt der Discriminante und einer beständig positiven Funktion der Koeffizienten sind.

oder durch das äquivalente

$$1)\quad \begin{cases} x = 10\,z\,t^2 + 20\,v\,t^3 + 4\,t^5 \\ y = -4\,z\,t - 6\,v\,t^2 - t^4 \end{cases}$$

dargestellt, in welchem t einen veränderlichen Parameter bedeutet.

Der Wert der Discriminante als Funktion der Koeffizienten ist verschiedentlich berechnet worden[1]). Wir geben den komplizierten Ausdruck nicht an, weil wir im folgenden keinen Gebrauch von ihm machen werden; die Darstellung der Koordinaten eines Punktes der Discriminantenmannigfaltigkeit als rationale Funktionen von z, v, t ist für unsere Zwecke vorteilhafter. Der Parameter t, welcher seinerseits sich als rationale Funktion von x, y, z, v ausdrücken lässt[2]), ist die Doppelwurzel der dem Punkt (x, y, z, v) der Discriminantenmannigfaltigkeit entsprechenden Gleichung und hat für jeden nichtsingulären Punkt einen reellen Wert.

2. Die „M_2 des Systems".

Die Gleichungen der „M_2 des Systems" lauten

$$2)\quad \begin{aligned} x &= -2\,t^3 (5\,v + 3\,t^2) \\ y &= 3\,t^2 (2\,v + t^2) \\ z &= -t\,(3\,v + t^2). \end{aligned}$$

t bedeutet die dreifache Wurzel der dem Punkt (x, y, z, v) der M_2 des Systems zugeordneten Gleichung und ist eine rationale Funktion von x, y, z, v[3]). Setzt man dieselbe für t in jede der Gleichungen 2) ein, so findet man drei M_3, welche die M_2 des Systems enthalten[4]). Sieben andere durch sie hindurchgehende

1) Salmon, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Bd 5 (1850), pag. 154. — Cayley, Second Memoir upon Quantics. Philosophical Transactions, Bd. 146, pag. 101. — Faa di Bruno, Théorie des formes binaires, Table IV[2]. — Salmon-Fiedler, Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 2. Aufl., pag. 289.

2) Nämlich

$$t = -\frac{1}{2}\,\frac{3x^2z - 8xy^2 + 104xyv^2 - 156xz^2v - 96y^2zv + 108yz^3 - 288xv^4 + 160yzv^3}{-x^2v + 12xyz - 16y^3 + 32xzv^2 + 176y^2v^2 - 468yz^2v + 216z^4 - 480yv^4 + 320z^2v^3}.$$

3) $$t = 2\,\frac{4\,y\,v - 3\,z^2}{x + 2\,z\,v}.$$

4) Diese drei M_3 haben ausser der M_2 des Systems noch die M_2

$$y\,v - z^2 - v^3 = 0, \quad x\,z - y^2 + y\,v^2 - z^2\,v = 0$$

gemeinsam.

M_3 von niedrigerer Ordnung[1]) ergeben sich unmittelbar aus dem Postscriptum zu CAYLEYs Abhandlung: „On the developable derived from an equation of the fifth order“[2]).

3. Die „M_1 des Systems“.

Die M_1 des Systems ist durch das Gleichungssystem

$$3) \qquad x = 4\,t^5; \quad y = -3\,t^4; \quad z = 2\,t^3; \quad v = -t^2$$

bestimmt.

Sie ist der geometrische Ort des Punktes, dem eine Gleichung mit 4 gleichen Wurzeln entspricht; t ist der Wert der vierfachen Wurzel. Dass sich t rational durch x, y, z, v darstellen lässt, ist unmittelbar ersichtlich. Durch Elimination des t aus 3) findet man die Gleichungen dreier M_3[3]), deren vollständiger Durchschnitt die M_1 des Systems ist.

4. Die „M_o des Systems“

besteht nur aus dem Koordinatenanfangspunkte, zu dem die einzige Gleichung mit 5 gleichen Wurzeln gehört.

5. Die zweifache Mannigfaltigkeit (2, 2)[4]),

welche wir stets als die $\mathfrak{M}_2$ bezeichnen wollen.

Nach pag. 6 sind die Gleichungen der $\mathfrak{M}_2$

$$\begin{aligned}
&t_1^5 + 10\,v\,t_1^3 + 10\,z\,t_1^2 + 5\,y\,t_1 + x = 0\\
&t_1^4 + 6\,v\,t_1^2 + 4\,z\,t_1 + y = 0\\
&t_2^5 + 10\,v\,t_2^3 + 10\,z\,t_2^2 + 5\,y\,t_2 + x = 0\\
&t_2^4 + 6\,v\,t_2^2 + 4\,z\,t_2 + y = 0,
\end{aligned}$$

aus deren Auflösung nach x, y, z, v sich ergiebt

$$4) \qquad \begin{aligned}
x &= 2\,t_1^2\,t_2^2\,(t_1 + t_2)\\
5\,y &= t_1\,t_2\,[t_1\,t_2 - 4\,(t_1 + t_2)^2]\\
5\,z &= (t_1 + t_2)\,(t_1^2 + 3\,t_1\,t_2 + t_2^2)\\
10\,v &= 2\,t_1\,t_2 - 3\,(t_1 + t_2)^2.
\end{aligned}$$

---

1) Nämlich der 4., während die andern resp. von der 7., 7., 6. Ordnung sind.

2) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Bd. 5 (1850).

3) $3\,z^2 - 4\,y\,v = 0$; $x + 2\,z\,v = 0$; $y + 3\,v^2 = 0$.

4) In der pag. 7 angegebenen Schreibweise.

Die Parameter t_1, t_2 sind die Werte der beiden Doppelwurzeln der Gleichung, welche dem Punkte (x, y, z, v) der $\mathfrak{M}_2$ entspricht; sie genügen einer quadratischen Gleichung, deren Koeffizienten in x, y, z, v rationale Werte haben. Man erhält sämtliche reellen Punkte der $\mathfrak{M}_2$, wenn man t_1 und t_2 alle reellen und alle konjugiert komplexen Werte beilegt[1]).

Um die Koordinaten eines Punktes der $\mathfrak{M}_2$ derart rational durch Parameter darzustellen, dass auch die letzteren rationale Funktionen der Koordinaten sind, setzen wir

$$t_1 + t_2 = 2s,$$

so dass

$$5v = t_1 t_2 - 6s^2$$

und

$$t_1 t_2 = 5v + 6s^2.$$

Durch Substitution der Werte von $t_1 + t_2$ und $t_1 t_2$ in 4) ergiebt sich

$$\begin{aligned} & x = 4s(5v + 6s^2)^2, \\ 5) \quad & y = (5v + 6s^2) \cdot (v - 2s^2), \\ & z = 2s(v + 2s^2), \end{aligned}$$

wo nun

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{xv - 6yz - 16zv^2}{-4yv + 9z^2 + 24v^3}$$

ist.

Dem s hat man alle reellen, aber keine komplexen Werte zu erteilen.

Zu einem gegebenen System v, s findet man die zugehörigen Werte t_1, t_2 als die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$6) \quad t^2 - 2st + 5v + 6s^2 = 0.$$

Setzt man den für s angegebenen Ausdruck in 5) ein, so gelangt man zu den Gleichungen dreier die $\mathfrak{M}_2$ enthaltenden $M_3^{\,2}$).

Um zu zeigen, dass die $\mathfrak{M}_2$ aus zwei Teilen verschiedener Art besteht, beweisen wir die beiden folgenden Sätze:

---

1) cf. pag. 8.

2) Der vollständige Durchschnitt dieser drei M_3 besteht aus der $\mathfrak{M}_2$ und den beiden M_2

$$-4yv + 9z^2 + 24v^3 = 0, \quad 3xz + 8yv^2 = 0;$$

und

$$z = 0, \quad y - 4v^2 = 0.$$

a) In der Nähe eines jeden Punktes der $\mathfrak{M}_2$, dem eine Gleichung mit zwei Paaren gleicher reeller Wurzeln entspricht, giebt es eine dreifach unendliche Schar von Punkten, die nicht mehr der $\mathfrak{M}_2$, aber noch der Discriminantenmannigfaltigkeit angehören.

Beweis:

Dem Punkte (x_0, y_0, z_0, v_0) der $\mathfrak{M}_2$ entspreche die Gleichung mit den reellen Wurzeln

$$\xi, \xi, \eta, \eta, \quad -2\xi - 2\eta.$$

Wenn man δ, ε, ε' beliebige, hinreichend kleine Werte giebt, nur mit der Beschränkung $\varepsilon \gtrless \varepsilon'$, so liegt der Punkt, zu dem die Gleichung mit den Wurzeln

$$\xi + \delta, \ \xi + \delta, \ \eta + \varepsilon, \ \eta + \varepsilon', \quad -2\xi - 2\eta - 2\delta - \varepsilon - \varepsilon'$$

gehört, auf der Discriminantenmannigfaltigkeit dem Punkte (x_0, y_0, z_0, v_0) so nahe, wie man will, aber nicht mehr in der $\mathfrak{M}_2$.

b) Jeder Punkt der $\mathfrak{M}_2$, dem eine Gleichung mit zwei Paaren gleicher komplexer Wurzeln entspricht, besitzt eine Umgebung, innerhalb deren kein Punkt existiert, welcher in der Discriminantenmannigfaltigkeit liegt, ohne der $\mathfrak{M}_2$ anzugehören.

Beweis:

Dem Punkte (x_1, y_1, z_1, v_1) der $\mathfrak{M}_2$ entspreche die Gleichung mit den Wurzeln

$$\xi + \eta i, \ \xi + \eta i, \ \ \xi - \eta i, \ \xi - \eta i, \ -4\xi.$$

Die Gleichung, welche einem in der Discriminantenmannigfaltigkeit aber nicht in der $\mathfrak{M}_2$ liegenden Punkte zugeordnet ist, kann höchstens 2 imaginäre Wurzeln besitzen. Bedeuten aber ξ_1, ξ_2 beliebige reelle Grössen und η_1, η_2 zwei solche, die nur der Bedingung

$$|\eta_1| < |\eta|, \qquad |\eta_2| < |\eta|$$

genügen, so sind die 4 Zahlen

$$\begin{array}{ll} \xi + \xi_1 + (\eta + \eta_1)\, i, & (\xi + \xi_2) + (\eta + \eta_2)\, i, \\ \xi + \xi_1 - (\eta + \eta_1)\, i, & (\xi + \xi_2) - (\eta + \eta_2)\, i \end{array}$$

stets imaginär.

Auf Grund dieser beiden Sätze nennen wir die Gesamtheit der Punkte, zu denen Gleichungen mit 2 Paaren gleicher komplexer Wurzeln gehören, den isolierten Teil und die Gesamtheit der Punkte, zu denen Gleichungen mit 2 Paaren gleicher reeller Wurzeln gehören, den nichtisolierten Teil der $\mathfrak{M}_2$. Der erstere ist durch die Ungleichung

$$v + s^2 > 0,$$

der letztere durch die Ungleichung

$$v + s^2 < 0$$

bestimmt. Beide Teile hängen in der M_1 des Systems zusammen, für welche

$$v + s^2 = 0.$$

6. Die einfache Mannigfaltigkeit (1, 2).

$$\begin{aligned}
t_1^5 + 10\,v t_1^3 + 10\,z t_1^2 + 5\,y t_1 + x &= 0, \\
t_1^4 + 6\,v t_1^2 + 4\,z t_1 + y &= 0, \\
t_1^3 + 3\,v t_1 + z &= 0, \\
t_2^5 + 10\,v t_2^3 + 10\,z t_2^2 + 5\,y t_2 + x &= 0, \\
t_2^4 + 6\,v t_2^2 + 4\,z t_2 + y &= 0.
\end{aligned}$$

Der Punkt (x, y, z, v) von (1, 2) repräsentiert die Gleichung mit der dreifachen Wurzel t_1 und der Doppelwurzel t_2. Die Elimination von x, y, z, v aus den fünf Gleichungen ergiebt für t_1, t_2 die Bedingung

$$(3\,t_1 + 2\,t_2)(t_1 - t_2)^2 = 0$$

oder da

$$t_1 \gtrless t_2$$ [1]

$$3\,t_1 \quad 2\,t_2 = 0.$$

Setzen wir

$$t_1 = 2\,\tau; \qquad t_2 = -3\,\tau,$$

so wird

7) $$x = -72\,\iota^5; \qquad y = 12\,\iota^4; \qquad z = \iota^3; \qquad v = -\frac{3}{2}\,\iota^2,$$

wo ι jeden reellen Wert annehmen kann.

---

1) cf. pag. 6.

Die Mannigfaltigkeit (1, 2) ist der gemeinsame Durchschnitt der drei M_3

$$yv + 18z^2 = 0; \qquad x - 48zv = 0; \qquad 3y - 16v^2 = 0.$$

Nach pag. 7 enthält die Discriminantenmannigfaltigkeit die sämtlichen unter 2) bis 6) aufgeführten Mannigfaltigkeiten und die M_0 des Systems ist in allen enthalten; ferner liegen die M_1 des Systems und die Mannigfaltigkeit (1, 2) sowohl in der M_2 des Systems wie in der $\mathfrak{M}_2$.

III.

Wir kommen jetzt zur Aufgabe, die drei Gebiete G_0, G_1, G_2 durch algebraische M_3 von einander zu sondern.

Da G_1 durch

$$D < 0$$

vollkommen charakterisiert ist, bleibt uns nur die Trennung von G_0 und G_2 übrig, für welche

$$D > 0.$$

G_0 und G_2 hängen in dem nichtisolierten Teile der $\mathfrak{M}_2$ zusammen[1]), sind also durch eine denselben enthaltende M_3 zu scheiden.

Jede der Discriminantenmannigfaltigkeit angehörige M_2 lässt sich analytisch darstellen, indem man zu den Gleichungen 1) pag. 39 eine Relation unter den Parametern z, v, t hinzufügt. Für die $\mathfrak{M}_2$ erhält man dieselbe durch Elimination von t aus der dritten Gleichung unter 5) und aus Gleichung 6) in der Form

$$8) \quad L(t, z, v) = 2t^6 + 22t^4v + 14t^3z + 68t^2v^2 + 72vzt + 40v^3 + 27z^2 = 0.$$

Aus der Irreduktibilität von $L(t, z, v)$ folgt, dass wenn ein zweifach ausgedehnter Teil der $\mathfrak{M}_2$ in einer algebraischen M_3 liegt, dieser die $\mathfrak{M}_2$ vollständig angehört. Eine jede durch den nichtisolierten Teil der $\mathfrak{M}_2$ gelegte M_3 enthält demnach auch den isolierten Teil, so dass keine M_3 in ihrer ganzen Ausdehnung zur Trennung der Gebiete G_0 und G_2 dienen kann. Mithin ist zunächst eine M_3 zu suchen, welche die beiden Teile der $\mathfrak{M}_2$ von einander scheidet, mit ihr also keine andere reelle M_1 als die des

---

1) cf. pag 8.

Systems gemeinsam hat[1]). Die in Anmerkung 3) pag. 40 genannten M_3 genügen dieser Bedingung nicht.

Um zu einer M_3, wie wir sie brauchen, zu gelangen, wenden wir uns zu einer Untersuchung des Schnittes der Discriminantenmannigfaltigkeit und der ebenen M_2[2])

$$z = z_0, \quad v = v_0,$$

wo z_0, v_0 irgend welche reellen Zahlen bedeuten.

Die Schnittkurve

$$\begin{aligned} x &= 10\, z_0\, t^2 + 20\, v_0\, t^3 + 4\, t^5 \\ y &= -4\, z_0\, t - 6\, v_0\, t^2 - t^4 \end{aligned}$$

ist von der Ordnung 5 und dem Geschlechte 0. Ihre Spitzen sind die Schnittpunkte der M_2 des Systems und der Ebene, werden also durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= -2\, t^3 (5\, v_0 + 3\, t^2) \\ y &= 3\, t^2 (2\, v_0 + t^2) \\ z_0 &= -\, t (3\, v_0 + t^2) \end{aligned}$$

bestimmt, die zu jedem Wertsystem (z_0, v_0) drei Wertsysteme (t, x, y) liefern.

Die Doppelpunkte der Schnittkurve liegen in der $\mathfrak{M}_2$; ihre Koordinaten ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= 4 s (5\, v_0 + 6\, s^2)^2 \\ y &= (5\, v_0 + 6\, s^2)(v_0 - 2\, s^2) \\ z &= 2\, s\, (v_0 + 2\, s^2) \end{aligned}$$

und ihre Anzahl ist so gross wie die der reellen Wurzeln s der kubischen Gleichung

$$z = 2\, s\, (v_0 + 2\, s^2),$$

1) Eine M_3, welche die $\mathfrak{M}_2$ in keiner andern reellen oder imaginären M_1 als in der des Systems schneidet, giebt es nicht. Die linke Seite der Gleichung einer solchen

$$\sum_{(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} c_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma v^\delta = 0$$

müsste nämlich durch die Substitution

$$\begin{aligned} x &= 4\, s\, (5\, v + 6\, s^2)^2 \\ y &= (5\, v + 6\, s^2)(v - 2\, s^2) \\ z &= 2\, s\, (v + 2\, s^2) \end{aligned}$$

in $v + s^2$ übergehen. Kein Term der Summe kann aber das Glied s^2 liefern.

2) Die wir jetzt kurz als Ebene bezeichnen wollen.

$$\text{d. h. } 1, \text{ wenn } \frac{v_0^3}{27} + \frac{z_0^2}{8} > 0$$

$$\text{und } 3, \text{ wenn } \frac{v_0^3}{27} + \frac{z_0^2}{8} \leqq 0.$$

Ein Doppelpunkt ist ein isolierter- oder ein Knotenpunkt, je nachdem er dem isolierten oder dem nichtisolierten Teile der $\mathfrak{M}_2$ angehört, also je nachdem

$$v_0 + s^2 > 0$$

$$\text{oder } v_0 + s^2 \leqq 0,$$

in andern Worten, die Schnittkurve besitzt ebensoviel Knotenpunkte wie reelle Wurzeln s in dem Intervall

$$(-\sqrt{-v_0} \ldots + \sqrt{-v_0})\,^{1)},$$

die Grenzen eingeschlossen, liegen, d. h.

$$3, \text{ falls } z_0^2 \leqq -\frac{8}{27} v_0^3,$$

$$1, \text{ falls } -\frac{8}{27} v_0^3 < z_0^2 \leqq -4\, v_0^3,$$

$$0, \text{ falls } -4\, v_0^3 < z_0^2.$$

Für jedes Wertsystem z_0, v_0 sind hiernach die Anzahlen der reellen Doppelpunkte, der Knoten- und der isolierten Punkte in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Anzahl der		
	reellen Doppelpunkte	Knotenpunkte	isolierten Punkte
$z_0^2 \leqq -\frac{8}{27} v_0^3$	3	3	0
$-\frac{8}{27} v_0^3 < z_0^2 \leqq -4\, v_0^3$	1	1	0
$-4\, v_0^3 < z_0^2$	1	0	1

In keiner Ebene $z = z_0$, $v = v_0$ giebt es also gleichzeitig Knotenpunkte und isolierte Punkte. Der nichtisolierte Teil der $\mathfrak{M}_2$ liegt gänzlich in dem Gebiete

1) Das Zeichen $\sqrt{}$ soll hier und im folgenden stets den positiven Wert der Quadratwurzel bezeichnen.

$$4v^3 + z^2 < 0,$$

der isolierte gänzlich in

$$4v^3 + z^2 > 0.$$

Die M_3

$$4v^3 + z^2 = 0$$

ist demnach eine solche, wie wir sie suchen. Dass sie die $\mathfrak{M}_2$ in keiner andern reellen M_1 als in der des Systems schneidet, ist sofort zu erkennen; denn für

$$z = 2s(v + 2s^2)$$

geht $4v^3 + z^2$ über in

$$4(v + s^2)(v^2 + 4s^4).$$

Die Relation

$$v + s^2 = 0$$

entspricht der M_1 des Systems;

$$v^2 + 4s^4 = 0$$

wird nur durch $v = 0$, $s = 0$ befriedigt.

Unser nächstes Ziel ist nachzuweisen, dass kein Punkt der M_4

$$4v^3 + z^2 > 0$$

in G_0 liegt[1]).

1. In jeder Ebene $z = z_0$, $v = v_0$ giebt es sowohl Punkte, die zu G_1 gehören, wie Punkte, die zu G_2 gehören.

$$x = 0, \quad y = -g, \quad z = z_0, \quad v = v_0$$

z. B. liegt in G_1 und

$$x = 0, \quad y = g, \quad z = z_0, \quad v = v_0$$

in G_2, wenn g eine positive Zahl oberhalb einer gewissen, von z_0, v_0 abhängigen Grenze bedeutet. Es ergiebt sich das durch Anwendung der Kriterien für die Anzahl reeller Wurzeln einer biquadratischen Gleichung.

2. Die Kurve, in welcher eine beliebige Ebene $z = z_0$, $v = v_0$ die Discriminantenmannigfaltigkeit schneidet, besteht aus einem einzigen, im Endlichen zusammenhängenden Zuge[2]).

Die Koordinaten x, y eines Punktes der Kurve sind ganze

1) Ohne weiteres könnte man das nur schliessen, wenn man wüsste, dass das Gebiet

$$D > 0, \qquad 4v^3 + z^2 > 0$$

ein in sich zusammenhängendes Kontinuum ist.

2) Natürlich von den isolierten Punkten abgesehen.

rationale Funktionen des Parameters t. Dem Punkte (x_0, y_0) entspreche der reelle Wert t_0, dem Punkte (x_1, y_1) der reelle Wert t_1[1]. Lässt man t alle reellen Werte von t_0 bis t_1 stetig durchlaufen, so gelangt man durch eine stetige, im Endlichen bleibende Bewegung auf der Schnittkurve von (x_0, y_0) zu (x_1, y_1).

3. Für

$$4\, v_0^3 + z_0^2 > 0$$

besitzt die Kurve keinen Knotenpunkt, so dass sie die Ebene nur in 2 Gebiete teilen kann, woraus folgt, dass es in jeder Ebene

$$z = z_0, \qquad v = v_0,$$

für welche

$$4\, v_0^3 + z_0^2 > 0$$

keinen zu G_0 gehörigen Punkt giebt.

Dasselbe gilt aber auch von der Ebene $(z = z_0,\ v = v_0)$, wenn

$$4\, v_0^3 + z_0^2 = 0.$$

Die Schnittkurve einer solchen und der Discriminantenmannigfaltigkeit hat nämlich einen Knotenpunkt, welcher mit zwei Spitzen zusammenfällt. Da in dem so entstehenden dreifachen Punkte die 3 Tangenten identisch sind, unterscheidet er sich fürs Auge in keiner Weise von einem gewöhnlichen Kurvenpunkte[2]; die Kurve zerlegt die Ebene also auch nur in 2 Teile.

Damit ist nachgewiesen, dass kein Punkt von G_0 in dem Gebiete

$$4\, v^3 + z^2 \geqq 0$$

liegt.

IV.

Unsere Aufgabe ist jetzt darauf zurückgeführt, eine M_3 zu finden, welche G_0 und G_2 in dem Gebiete

$$4\, v^3 + z^2 < 0$$

von einander trennt, welche also den nichtisolierten Teil der $\mathfrak{M}_2$ enthält, ausserdem aber innerhalb des genannten Gebietes keinen

---

1) Falls (x_0, y_0) oder (x_1, y_1) ein Knotenpunkt ist, sei einer der beiden zugehörigen Parameterwerte t_0 resp. t_1.

2) Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. 1873. pag. 31.

reellen Punkt mit der Discriminantenmannigfaltigkeit gemeinsam hat[1]).

Die linke Seite der Gleichung einer solchen M_3 muss die Eigenschaft haben, durch die Substitution

$$x = 10\,zt^2 + 20\,vt^3 + 4\,t^5$$
$$y = -4\,zt - 6\,vt^2 - t^4$$

in das Produkt aus $L\,(t, z, v)$[2]) und einer andern ganzen rationalen Funktion von t, z, v übergeführt zu werden, die für kein reelles Wertsystem (t, z, v), das der Bedingung

$$4\,v^3 + z^2 < 0$$

genügt, verschwindet.

Eine M_3, deren Gleichung in x, y nur vom ersten Grade ist, kann das Geforderte nicht leisten, weil die Relation zwischen t, z, v, welche ihrem Schnitte mit der Discriminantenmannigfaltigkeit entspricht, t in keiner höhern als der 5. Potenz enthält.

Wir setzen deshalb

$$P(x, y, z, v) = 3\,vx^2 - 3\,\beta zxy - 3\,\gamma v^2 y^2 + \varphi\, v^2 zx - \psi\, v\, z^2 y + \chi$$

und untersuchen, ob sich für β, γ, φ, ψ, χ rationale Funktionen von z, v derart angeben lassen, dass

1. $P(10\,zt^2 + 20\,vt^3 + 4\,t^5,\ -4\,zt - 6\,vt^2 - t^4,\ z,\ v)$ durch $L\,(t, z, v)$ teilbar ist und dass

2. der Quotient $Q\,(t, z, v)$ die erwähnte Bedingung erfüllt.

Führen wir bei unbestimmten Werten von β, γ, φ, ψ, χ die Division aus, so erhalten wir

$$Q(t,z,v) = 3\left[8\,vt^4 + 2\beta z\,t^3 - \left(8 + \frac{1}{2}\gamma\right)v^2 t^2 - 16\,zvt + \left(16 - \frac{1}{2}\gamma\right)v^3 - \beta z^2\right]$$

---

1) Es giebt keine M_3, die aus der Discriminantenmannigfaltigkeit nur die $\mathfrak{M}_2$ ausschneidet. Wäre

$$\sum_{(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta)} c_{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma v^\delta = 0$$

die Gleichung einer solchen, so müsste

$$\sum_{(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta)} c_{\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta}\,(10\,zt^2 + 20\,vt^3 + 4\,t^5)^\alpha \cdot (-4\,zt - 6\,vt^2 - t^4)^\beta z^\gamma v^\delta$$
$$= L\,(t, z, v)$$

sein. Die linke Seite enthält aber nur solche nicht mit z oder v multiplizierte Potenzen von t, deren Exponenten von der Form

$$5\,\alpha + 4\,\beta$$

sind, wo α, β ganze, nicht negative Zahlen bedeuten, also kein Glied t^6.

2) cf. pag. 44, 8).

und als Rest eine Funktion von t, deren Koeffizienten von z, v, β, γ, φ, ψ, χ abhängen. Bevor wir zeigen, dass der Rest bei passender Wahl der unbestimmt gelassenen Grössen identisch verschwindet, prüfen wir, ob β, γ so bestimmt werden können, dass

$$Q\ (t,\ z,\ v) = 0$$

als Gleichung in t betrachtet, für alle reellen der Bedingung

$$4\,v^3 + z^2 < 0$$

genügenden Wertsysteme z, v nur imaginäre Wurzeln hat.

Jede Ebene $z = z_0$, $v = v_0$ schneidet

$$P\ (x,\ y,\ z,\ v) = 0$$

in einer Kurve zweiter Ordnung. Da es sich später als vorteilhaft erweisen wird, zu wissen, dass dieselbe aus einem einzigen Zuge besteht, beschränken wir β, γ von vorn herein so, dass sie nur eine Ellipse oder Parabel sein kann, was eintritt, wenn

$$\beta^2 z^2 + 4\,\gamma\, v^3 \leqq 0.$$

Für die jetzt in Betracht kommenden Wertsysteme v, z ist diese Bedingung erfüllt, sobald

$$\gamma \geqq \beta^2.$$

Um aus

$$Q\ (t,\ z,\ v) = 0$$

die dritte Potenz der Unbekannten fortzuschaffen, setzen wir

$$t = \tau - \frac{\beta}{16}\,\frac{z}{v}$$

und erhalten

$$\tau^4 - \left(6\,\lambda^2 \frac{z^2}{v^2} + (1+\mu)\,v\right)\tau^2 + \left(8\,\lambda^3 \frac{z^3}{v^3} + 2\,(1+\mu)\,\lambda\, z - 2\,z\right)\tau$$
$$- 3\,\lambda^4 \frac{z^4}{v^4} - (1+\mu)\,\lambda^2 \frac{z^2}{v} + (2-\mu)\,v^2 = 0,$$

wo $\lambda = \frac{\beta}{16}$, $\mu = \frac{\gamma}{16}$.

Der Bedingung

$$\gamma \geqq \beta^2$$

entspricht

$$\mu \geqq 16\,\lambda^2.$$

Wir werden jetzt nachweisen, dass die Gleichung vierten Grades keine reelle Wurzel besitzt, wenn wir für μ den Wert 1,

für λ den Wert $\frac{1}{6}$ wählen. Bei dieser Annahme wird die linke Seite der Gleichung

$$\tau^4 - \frac{1}{6v^2}(z^2 + 12v^3)\tau^2 + \frac{z}{27v^3}(z^2 - 36v^3)\tau - \frac{1}{432}\frac{z^4}{v^4} - \frac{1}{18}\frac{z^2}{v} + v^2.$$

Wir betrachten sie als Funktion von τ und z und bezeichnen sie dementsprechend mit $F(\tau, z)$; dem v denken wir uns irgend einen bestimmten, natürlich negativen Wert beigelegt.

Nachzuweisen ist, dass

$$F(\tau, z) > 0$$

für jedes reelle τ und jedes z in dem Intervall

$$2v\sqrt{-v} < z < -2v\sqrt{-v}.$$

Bedeutet $\frac{g}{4}$ eine positive Zahl, welche grösser ist als $\frac{1}{4}$ und als der absolute Betrag der Koeffizienten von τ^2, τ, τ^0 für alle Werte von z in diesem Intervall, so ist bekanntlich

$$F(\tau, z) > 0,$$
$$\text{falls } |\tau| \geqq g.$$

τ und z seien die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in einer Ebene, in welcher die vier Geraden

$$z = \pm 2v\sqrt{-v},$$
$$\tau = \pm g$$

ein Rechteck bilden, auf dessen ersten beiden Seiten $F(\tau, z)$ resp. die Werte hat:

$$F(\tau, -2v\sqrt{-v}) = \tau^4 - \frac{4}{3}v\tau^2 + \frac{80}{27}v\sqrt{-v}\,.\,\tau + \frac{32}{27}v^2$$

$$= \left(\frac{\tau}{\sqrt{-v}} - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\tau}{\sqrt{-v}}\right)^2 + \frac{4}{3}\cdot\frac{\tau}{\sqrt{-v}} + \frac{8}{3}\right],$$

und

$$F(\tau, 2v\sqrt{-v}) = \tau^4 - \frac{4}{3}v\tau^2 - \frac{80}{27}v\sqrt{-v}\cdot\tau + \frac{32}{27}v^2$$

$$= \left(\frac{\tau}{-\sqrt{-v}} - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{\tau}{\sqrt{-v}}\right)^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{\tau}{\sqrt{-v}} + \frac{8}{3}\right].$$

$F(\tau, \mp 2v\sqrt{-v})$ verschwindet für

$$\tau = \pm \frac{2}{3} \sqrt{-v}$$

und ist für alle andern reellen Werte von τ positiv[1]).

Um jeden der beiden Punkte

$$z = \mp 2 v \sqrt{-v}, \qquad \tau = \pm \frac{2}{3} \sqrt{-v}$$

herum lässt sich eine gänzlich innerhalb des Rechtecks liegendes Gebiet abgrenzen, in welchem $F(\tau, z)$ überall, ausgenommen an den beiden Punkten selbst, positiv ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$z_0 = -2 v \sqrt{-v}, \qquad \tau_0 = \frac{2}{3} \sqrt{-v},$$

so stimmt nämlich für alle genügend kleinen Werte von

$$|z - z_0|, \qquad |\tau - \tau_0|$$

das Vorzeichen von $F(\tau, z)$ mit dem von

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{\substack{\tau=\tau_0\\ z=z_0}} \cdot (\tau - \tau_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{\substack{\tau=\tau_0\\ z=z_0}} \cdot (z - z_0)$$

überein. Da nun

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{\tau_0, z_0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{\tau_0, z_0} < 0,$$

so ist für alle innerhalb des Rechtecks und in hinreichender Nähe von (τ_0, z_0) liegenden Punkte

$$F(\tau, z) > 0.$$

Ebenso erkennt man, dass der Punkt

$$z = 2 v \sqrt{-v}, \qquad \tau = -\frac{2}{3} \sqrt{-v}$$

von einem Gebiete umgeben wird, in dem $F(\tau, z)$ überall positiv ist.

Durch je eine in den beiden definierten Gebieten verlaufende Kurve schneiden wir von dem Rechteck zwei Flächenstücke ab, so dass eine Figur übrig bleibt, auf deren Umfange überall

---

1) λ und μ können nicht etwa so bestimmt werden, dass $F(\tau, \pm 2 v \sqrt{-v})$ für alle reellen τ grösser als 0 ist. Dass $F(\tau, \pm 2 v \sqrt{-v})$ niemals negativ ist, erreicht man ausser durch das von uns gewählte Wertsystem $\lambda = \frac{1}{6}$, $\mu = 1$ auch durch unzählig viele andere.

$$F(\tau, z) > 0$$

ist. Da die in der üblichen Weise ausgeführte Untersuchung lehrt, dass $F(\tau, z)$ im Innern dieser Figur kein Minimum besitzt, so folgt nach einem von Herrn Prof. WEIERSTRASS in seinen Vorlesungen bewiesenen Satz:

„Wenn eine Funktion von beliebig vielen reellen Veränderlichen, deren Bereich ein Kontinuum ist, für alle diesem Bereiche angehörigen Wertsysteme der Veränderlichen endlich und stetig ist, wenn es ferner im Innern des Bereiches Wertsysteme giebt, für welche der Funktionswert kleiner ist als für jedes Wertsystem an der Grenze des Bereichs, so besitzt die Funktion ein Minimum wenigstens für ein Wertsystem, das dem Innern des Bereiches angehört";

dass $F(\tau, z)$ für alle Punkte im Innern der betrachteten Figur und folglich überall innerhalb des von den beiden Geraden

$$z = \pm 2 v \sqrt{-v}$$

begrenzten Parallelstreifens positiv ist. Damit ist nachgewiesen, dass $Q(t, z, v)$[1]), wenn $\beta = \frac{8}{3}$, $\gamma = 16$, für kein reelles Wertsystem t, z, v, welches der Ungleichung

$$4 v^3 + z^2 < 0$$

genügt, verschwindet.

Der Rest, den man bei der Division von

$$P(10 z t^2 + 20 v t^3 + 4 t^5, \quad -4 z t - 6 v t^2 - t^4, z, v)$$

durch $L(t, z, v)$ erhält[1]) ist, falls β und γ die eben angegebenen Werte haben,

$$\begin{aligned}&(688 + 4\varphi) v^2 z t^5 + [(468 + \psi) v z^2 + 48 v^4] t^4 \\ &+ (3440 + 20\varphi) v^3 z t^3 + [288 v^5 + (4528 + 10\varphi + 6\psi) v^2 z^2] t^2 \\ &+ [192 v^4 z + (1872 + 4\psi) v z^3] t + \chi - (40 v^3 + 27 z^2)(24 v^3 - 8 z^2).\end{aligned}$$

Er verschwindet identisch, d. h. die Koeffizienten sämtlicher Potenzen von t werden 0, für

$$\varphi = -172, \qquad \psi = -468 - 48 \frac{v^3}{z^2},$$

$$\chi = (40 v^3 + 27 z^2)(24 v^3 - 8 z^2).$$

---

1) cf. pag. 49.

Die M_3

$$P(x, y, z, v) = 3vx^2 - 8zxy - 48v^2y^2 - 172v^2zx$$
$$+ (468z^2 + 48v^3)vy + (40v^3 + 27z^2)(24v^3 - 8z^2) = 0$$

hat also mit der Discriminantenmannigfaltigkeit die $\mathfrak{M}_2$, aber in dem Gebiete

$$4v^3 + z^2 < 0$$

sonst keinen reellen Punkt gemeinsam.

Die Kurve zweiter Ordnung, in welcher eine beliebige Ebene $z = z_0$, $v = v_0$ des Gebietes

$$4v^3 + z^2 < 0$$

die M_3

$$P(x, y, z, v) = 0$$

schneidet, ist

1. weder Parabel noch Hyperbel, weil

$$16z_0^2 + 144v_0^3 < 0,$$

2. nicht ein System zweier geraden Linien, weil

$$\begin{vmatrix} 3v_0, & -4z_0, & -86v_0^2z_0 \\ -4z_0, & -48v_0^2, & v_0(234z_0^2 + 24v_0^3) \\ -86v_0^2z_0, & v_0(234z_0^2 + 24v_0^3), & (40v_0^3 + 27z_0^2)(24v_0^3 - 8z_0^2) \end{vmatrix}$$
$$= -139\,968\,v_0^9 + v_0^3z_0^2(275\,232\,v_0^3 + 22\,580\,z_0^2) + 3456z_0^6 > 0.$$

3. nicht eine imaginäre Ellipse, weil wenigstens einer ihrer Punkte reell ist, nämlich der in der Ebene $z = z_0$, $v = v_0$ liegende Punkt der $\mathfrak{M}_2$[1]).

Die Schnittkurve ist mithin eine reelle, eigentliche Ellipse.

Die Gerade

$$x = 0$$

schneidet dieselbe in 2 Punkten, von denen der eine die Koordinaten

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{1}{24v_0}(117z_0^2 + 12v_0^3 + R)$$

hat, wo R den positiven Wert von

$$\sqrt{11\,664\,v_0^6 + 6\,744\,v_0^3z^2 + 11\,097z^4}$$

bedeutet. Diesem Punkte (x_0, y_0) entspricht die Gleichung

---

1) Eventuell, nämlich falls $z_0^2 \leqq -\frac{8}{27}v_0^3$, die drei in dieser Ebene liegenden Punkte der $\mathfrak{M}_2$.

$$t^5 + 10\, v_0\, t^3 + 10\, z_0\, t^2 + 5\, y_0\, t = 0,$$

welche drei reelle Wurzeln besitzt, da die Discriminante von

$$t^4 + 10\, v_0\, t^2 + 10\, z_0\, t + 5\, y_0 = 0$$

gleich

$$\frac{5^3}{6^6 . 2 . v_0^3} \Big(R\, (5188\, v_0^6 - 7008\, v_0^3 z_0^2 + 13\,041\, z_0^4)$$

$$+ 1\,374\,165\, z_0^6 - 322\,380\, v_0^3 z_0^4 + 940\,608\, v_0^6 z_0^2 - 559\,872\, v_0^9 \Big),$$

also negativ ist. Auf jeder Schnittellipse in dem Gebiete

$$4\, v^3 + z^2 < 0$$

giebt es demnach mindestens einen Punkt, in dem

$$D < 0.$$

Die Ellipse hat mit der Discriminantenmannigfaltigkeit nur entweder 1 oder 3 reelle Punkte gemeinsam, die der $\mathfrak{M}_2$ angehören, also Doppelpunkte der Discriminantenmannigfaltigkeit sind. Lässt man daher einen Punkt die ganze Kurve durchlaufen, so wechselt der dem Punkt entsprechende Wert von D niemals sein Vorzeichen. Somit können wir jetzt schliessen, dass für alle Punkte der Ellipse, die der $\mathfrak{M}_2$ angehörigen ausgenommen,

$$D < 0.$$

Wir haben demnach das Resultat, dass der in dem Gebiete

$$4\, v^3 + z^2 < 0$$

liegende Teil der M_3

$$P\, (x,\, y,\, z,\, v) = 0$$

vollständig in

$$D < 0$$

liegt mit Ausnahme der Punkte, die sich auf dem nichtisolierten Teile der $\mathfrak{M}_2$ befinden, für die also

$$D = 0.$$

V.

Die eben bewiesene Eigenschaft der M_3

$$P\, (x,\, y,\, z,\, v) = 0$$

wird uns nunmehr in den Stand setzen, die Trennung der Gebiete G_0, G_2 auch in

$$4v^3 + z^2 < 0$$

zu bewerkstelligen.

G_0 liegt gänzlich in dem durch die Ungleichungen

$$D > 0, \quad 4v^3 + z^2 < 0$$

charakterisierten Teile der M_4.

Gäbe es in G_0 sowohl Punkte, die dem Gebiete

$$D > 0, \quad 4v^3 + z^2 < 0, \quad P > 0$$

angehören, als auch Punkte, die in

$$D > 0, \quad 4v^3 + z^2 < 0, \quad P < 0$$

liegen, so müsste man auf einer stetigen, vollständig in G_0 und demzufolge auch in

$$(D > 0, \quad 4v^3 + z^2 < 0)$$

verlaufenden M_1 von einem Punkte der ersten Art zu einem der zweiten Art gelangen können. Auf diesem Wege würde man wegen der Stetigkeit der Funktion $P(x, y, z, v)$ notwendig einen Punkt passieren, in welchem

$$P(x, y, z, v) = 0.$$

Einen solchen giebt es aber in

$$D > 0, \quad 4v^3 + z^2 < 0$$

nicht, da wenn

$$4v^3 + z^2 < 0, \quad P(x, y, z, v) = 0,$$

nach pag. 55 $D \leqq 0$ ist.

Den beiden vorher genannten Gebieten können also nicht Punkte von G_0 angehören.

Weil für

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad v = -1$$
$$P(x, y, z, v) > 0$$

ist und weil die diesem Punkte entsprechende Gleichung fünften Grades fünf reelle Wurzeln besitzt, so ist für alle Punkte des Gebietes G_0

$$D > 0, \quad 4v^3 + z^2 < 0, \quad P(x, y, z, v) > 0.$$

Um nachweisen zu können, dass in dem durch die drei letzten Ungleichungen charakterisierten Teile der M_4 kein Punkt von G_2 liegt, überzeugen wir uns zunächst davon, dass der durch die Ungleichung

$$4v^3 + z^2 < 0$$

bestimmte Teil G'_2 des Gebietes G_2 ein in sich zusammenhängendes Kontinuum ist.

1. Von jedem Punkte A in G'_2 kann man, ohne dieses Gebiet zu verlassen, auf einer stetigen Kurve zu einem solchen Punkte desselben gelangen, der einem Punkte der $\mathfrak{M}_2$ beliebig nahe liegt.

A habe die Koordinaten x_0, y_0, z_0, v_0. Die von der Ebene $z=z_0$, $v=v_0$ aus der Discriminantenmannigfaltigkeit ausgeschnittene Kurve S zerlegt diese Ebene in mehrere Gebiete. Das, in welchem sich A befindet, wird, wie jedes derselben, entweder von der gesamten Kurve S oder von einem ihrer Teile T begrenzt. Im ersteren Falle ist mindestens ein Punkt der Begrenzung ein Knotenpunkt; im letzteren besitzt die Schnittkurve ausser dem Zweige T noch einen, T', welche beide wenigstens einen Punkt Q gemeinsam haben, da S aus einem einzigen, im Endlichen zusammenhängenden Zuge besteht[1]). Q ist als Schnittpunkt zweier Zweige ein zwei- oder mehrelementiger Punkt der Kurve. Diese hat an singulären Punkten drei Spitzen, welche für keins der in Betracht kommenden Wertsysteme (z_0, v_0) zusammenfallen können[2]), und je nach den Werten von z_0, v_0 einen oder drei Knotenpunkte. Ist der Punkt Q zweielementig, so muss er ein Knotenpunkt sein, denn in einer Spitze stossen zwei Kurvenzweige zusammen, welche beide in derselben abbrechen, was T als Begrenzung eines Flächenstücks an keiner im Endlichen liegenden Stelle kann. Fallen in Q mehrere zweielementige Punkte zusammen so befindet sich unter diesen wenigstens ein Knotenpunkt. Stets also giebt es auf T einen Punkt, welcher der $\mathfrak{M}_2$ angehört und damit ist der unter 1. aufgestellte Satz bewiesen.

---

1) cf. pag. 47.

2) Die drei Werte von t, welche den Spitzen entsprechen, sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$t^3 + 3\,v_0\,t + z_0 = 0,$$

deren Discriminante

$$-\frac{1}{4}(4\,v_0^3 + z_0^2)$$

für alle Punkte von G'_2 positiv ist; sie sind also von einander verschieden. Zu zwei ungleichen Wurzeln t_1 und t_2 dieser Gleichung kann aber nicht derselbe Punkt der Kurve gehören, weil diesem sonst eine Gleichung 5. Grades mit der dreifachen Wurzel t_1 und der dreifachen Wurzel t_2 zugeordnet wäre.

2. Sind D_1 und D_2 zwei beliebige Punkte des nichtisolierten Teils der $\mathfrak{M}_2$, so kann man von jedem Punkte P_1 in G'_2, dessen Abstand von D_1 unterhalb einer gewissen Grenze liegt, auf einer stetigen, aus G'_2 nie heraustretenden Kurve zu einem jeden Punkte P_2 dieses Gebiets gelangen, dessen Entfernung von D_2 hinreichend klein ist[1]).

Die den Punkten D_1 und D_2 entsprechenden Gleichungen 5. Grades mögen resp. die reellen Wurzeln

$$\begin{array}{llllll} a_1, & a_1, & b_1, & b_1, & -2a_1 & -2b_1 \\ a_2, & a_2, & b_2, & b_2, & -2a_2 & -2b_2 \end{array}$$

haben.

Wir definieren $10\,v$, $10\,z$, $5\,y$ und x als die Koeffizienten der Gleichung mit den Wurzeln

$$\begin{array}{ll} a_1 + \mu\,(a_2 - a_1) + \varrho\,i, & a_1 + \mu\,(a_2 - a_1) - \varrho\,i, \\ b_1 + \mu\,(b_2 - b_1) + \sigma\,i, & b_1 + \mu\,(b_2 - b_1) - \sigma\,i, \end{array}$$
$$-2\,a_1 - 2\,b_1 - 2\,\mu\,(a_2 + b_2 - a_1 - b_1),$$

so dass x, y, z, v ganze rationale reelle Funktionen von μ, ϱ, σ sind.

Die Entwicklung von $4\,v^3 + z^2$ nach Potenzen von ϱ und σ ergebe

$$4\,v^3 + z^2 = f_{00}(\mu) + \varrho\,f_{10}(\mu) + \sigma\,f_{01}(\mu) + \varrho^2 f_{20}(\mu) + \varrho\,\sigma\,f_{11}(\mu) + \sigma^2 f_{02}(\mu) + \ldots$$

Für alle μ in dem Intervall $(0 \ldots 1)$ sei F_{00}[2]) der kleinste Wert von $|f_{00}(\mu)|$ und die grössten Werte von

$$|f_{10}(\mu)|, \qquad |f_{01}(\mu)|, \qquad |f_{20}(\mu)|, \ldots$$

seien resp.

$$F_{10}, \qquad F_{01}, \qquad F_{20}, \ldots$$

Es lassen sich in mannigfacher Weise zwei endliche, positive Zahlen ϱ_0, σ_0 so angeben, dass wenn

$$0 < \varrho < \varrho_0, \qquad 0 < \sigma < \sigma_0.$$

$$F_{00} > \varrho\,F_{10} + \sigma\,F_{01} + \varrho^2 F_{20} + \varrho\,\sigma\,F_{11} + \sigma^2 F_{02} + \ldots,$$

dass also auch

---

1) Der Abstand zweier Punkte in der M_4 liegt unter einer gewissen Grenze, bedeutet, dass die Differenzen der gleichnamigen Koordinaten beider Punkte dem absoluten Werte nach kleiner als eine bestimmte Zahl sind.

2) Da für die genannten Werte von μ $f_{00}(\mu)$ negativ und von 0 verschieden ist, kann F_{00} nicht gleich 0 sein.

$$F_{00} > |\varrho f_{10}(\mu) + \sigma f_{01}(\mu) + \varrho^2 f_{20}(\mu) + \varrho\sigma f_{11}(\mu) + \sigma^2 f_{02}(\mu) + \ldots,|$$

falls

$$0 \leqq \mu \leqq 1, \qquad 0 < \varrho < \varrho_0, \qquad 0 < \sigma < \sigma_0$$

und folglich unter denselben Bedingungen

$$4v^3 + z^2 = f_{00}(\mu) + \varrho f_{10}(\mu) + \sigma f_{01}(\mu) + \varrho^2 f_{20}(\mu) + \ldots$$
$$< 0.$$

Sind nun die Wurzeln der den Punkten P_1 und P_2 zugeordneten Gleichungen bezüglich

$$a_1 + \alpha_1 i, \quad a_1 - \alpha_1 i, \quad b_1 + \beta_1 i, \quad b_1 - \beta_1 i, \quad -2a_1 - 2b_1$$

und

$$a_2 + \alpha_2 i, \quad a_2 - \alpha_2 i, \quad b_2 + \beta_2 i, \quad b_2 - \beta_2 i, \quad -2a_2 - 2b_2,$$

so dürfen wir voraussetzen, dass

$$0 < \alpha_1 < \varrho_0; \qquad 0 < \beta_1 < \sigma_0$$
$$0 < \alpha_2 < \varrho_0; \qquad 0 < \beta_2 < \sigma_0,$$

woraus sich für

$$0 \leqq \mu \leqq 1$$
$$0 < \alpha_1 + \mu(\alpha_2 - \alpha_1) < \varrho_0, \qquad 0 < \beta_1 + \mu(\beta_2 - \beta_1) < \sigma_0$$

ergiebt.

Wir substituieren

für ϱ den Wert $\alpha_1 + \mu(\alpha_2 - \alpha_1)$,
" σ " " $\beta_1 + \mu(\beta_2 - \beta_1)$;

x, y, z, v sind alsdann Funktionen der einzigen Veränderlichen μ. Durchläuft dieselbe alle Werte von 0 bis 1, so beschreibt der Punkt (x, y, z, v) eine stetige Kurve, welche P_1 mit P_2 verbindet, gänzlich in G_2 und in dem Gebiete $(4v^3 + z^2 < 0)$, also gänzlich in G'_2 liegt.

Die Zusammenfassung des unter 1. und 2. Bewiesenen ergiebt, dass G'_2 ein in sich zusammenhängendes Kontinuum ist.

Nunmehr sind wir im Stande, mittelst einer Betrachtung, welche der auf pag. 56 angestellten ganz ähnlich ist, zu schliessen, dass Punkte von G_2 nur in einem der beiden Gebiete

$$D > 0, \qquad 4v^3 + z^2 < 0, \qquad P > 0;$$
$$D > 0, \qquad 4v^3 + z^2 < 0, \qquad P < 0$$

vorkommen können.

Da für den Punkt

$$x = 0, \qquad y = g, \qquad z = z_0, \qquad v = v_0,$$

welcher bei beliebigen Werten von z_0, v_0 und einem hinreichend grossen positiven Werte von g zu G_2 gehört[1]), die Funktion P negativ ist, liegt in

$$D > 0, \qquad 4v^3 + z^2 < 0, \qquad P > 0$$

kein Punkt des Gebietes G_2.

Damit ist die Scheidung der drei Gebiete vollkommen durchgeführt.

G_1 wird charakterisiert durch die Ungleichung

$$D < 0;$$

G_0 durch

$$D > 0, \qquad 4v^3 + z^2 < 0, \qquad P(x, y, z, v) > 0;$$

G_2 durch

$$D > 0, \qquad 4v^3 + z^2 \geqq 0,$$

und

$$D > 0, \qquad 4v^3 + z^2 < 0, \qquad P(x, y, z, v) < 0;$$

hierin ist

$$P(x, y, z, v) = 3vx^2 - 8zxy - 48v^2y^2 - 172v^2zx + (468z^2 + 48v^3)vy + (40v^3 + 27z^2)(24v^3 - 8z^2).$$

---

§ 4.

Die Kroneckersche Resolvente zwölften Grades der allgemeinen Gleichung fünften Grades.

Die Gleichung

$$1) \quad t^5 + pt^3 + qt + r = 0$$

gehört sowohl zu der in § 2 wie zu der in § 3 behandelten Kategorie. Die Anwendung der für die viergliedrigen Gleichungen benutzten Methoden ergiebt, dass 1)

5 reelle Wurzeln hat, wenn $D > 0, \; p < 0, \; E < 0;$
3 „ „ „ „ $D < 0;$
1 „ Wurzel „ „ $D > 0, \; p > 0,$
oder $D > 0, \; p < 0, \; E > 0;$

wo D gleich der Discriminante und E gleich der Funktion

---

1) cf. pag. 47.

$$125(4+5\mu)r^2 - 64pq^2 + 16(1-\mu)p^3q + 4\mu p^5$$

ist, in welcher μ null oder eine beliebig (auch unendlich gross) zu wählende positive Zahl bedeutet.

Durch Specialisierung des pag. 60 gefundenen Resultates erhält man für 1) Kriterien, die mit den soeben angegebenen übereinstimmen, falls man in letzteren μ den Wert $\frac{4}{5}$ beilegt.

In enger Beziehung zu den Gleichungen von der Form 1) steht die von Herrn KRONECKER für die allgemeine Gleichung 5. Grades aufgestellte Resolvente 12. Grades[1])

2) $(f^2-z)^6 - 4z(f^2-z)^5 + 10y(f^2-z)^3 - x(f^2-z) + 5y^2 - xz = 0,$

deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen der Koeffizienten und der Wurzel aus der Discriminante der Gleichung fünften Grades sind. Bezeichnet man nämlich die Wurzeln von 2) mit

$$\pm f, \quad \pm f_0, \quad \pm f_1, \quad \pm f_2, \quad \pm f_3, \quad \pm f_4,$$

so genügen die 5 Grössen

$$u_k = (f+f_k)(f-f_k)(f_{k+1}-f_{k-1})$$
$$(k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad f_5 = f_0, \quad f_{-1} = f_4)$$

der Gleichung[2])

4) $$\left\{\frac{u}{2\sin\frac{2\pi}{5}}\right\}^5 - 10y\left\{\frac{u}{2\sin\frac{2\pi}{5}}\right\}^3 + 5(9y^2-xz)\frac{u}{2\sin\frac{2\pi}{5}} - \sqrt{-R} = 0,$$

in welcher

$$R = x^3 - 1728y^5 + 1600y^4z^3 + 720xy^3z - 80x^2yz^2 - 640xy^2z^4 + 64x^2z^5$$ [3]).

Die Resolvente 12. Grades kann bei reellen Werten von x, y, z nur entweder 12 reelle oder 4 rein imaginäre und 8 komplexe oder 12 rein imaginäre oder 4 reelle und 8 komplexe Wurzeln haben[4]), wie man aus den unter den Wurzeln bestehenden linearen Relationen erkennt, wenn man dieselben auf eine solche

---

1) Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 27. Juni 1861.

2) KRONECKER, Monatsberichte der Berliner Akademie vom 27. Juni 1861. — BRIOSCHI, Annali di Matematica, Serie II. Bd. 1, pag. 326.

3) R^2 ist bis auf einen Zahlenfaktor die Discriminante von 2).

4) Unter einer komplexen Wurzel ist hier eine solche verstanden, deren reeller Teil nicht null ist.

Form bringt, dass alle Koeffizienten reell sind. Diesen 4 bei der Gleichung 2) möglichen Fällen entsprechen gemäss folgender Tabelle 4 bestimmte Fälle der Gleichung 4):

Besitzt die Gleichung 12. Grades	so hat die Gleichung 5. Grades	
12 reelle W.	5 reelle W.	$R<0$
4 rein imag. u. 8 kompl. W.	1 reelle u. 4 kompl. W.	
12 rein imag. W.	5 rein imag. W.	$R>0$
4 reelle u. 8 kompl. W.	1 rein imag. u. 4 kompl. W.	

Für einen positiven Wert von R genügt

$$v = \frac{u}{i}$$

der nur reelle Koeffizienten enthaltenden Gleichung

$$\text{4a)} \quad \left\{\frac{v}{2\sin\frac{2\pi}{5}}\right\}^5 + 10y\left\{\frac{v}{2\sin\frac{2\pi}{5}}\right\}^3 + 5(9y^2 - xz)\frac{v}{2\sin\frac{2\pi}{5}} - \sqrt{R} = 0.$$

Indem wir zur Unterscheidung der Fälle einer und fünf reeller Wurzeln der Gleichungen 4) und 4a) die pag. 60 für die Gleichung 1) genannten Kriterien anwenden[1]), ergiebt sich, dass die Resolvente 12. Grades besitzt

12 reelle Wurzeln, wenn

$$R < 0, \quad y > 0, \quad R - 32y(9y^2 - xz)(4y^2 - xz) > 0;$$

4 rein imaginäre und 8 komplexe Wurzeln, wenn

$$R < 0, \quad y < 0,$$

oder $R < 0, \quad y > 0, \quad R - 32y(9y^2 - xz)(4y^2 - xz) < 0;$

12 rein imaginäre Wurzeln, wenn

$$R > 0, \quad y < 0, \quad R - 32y(9y^2 - xz)(4y^2 - xz) < 0;$$

4 reelle und 8 komplexe Wurzeln, wenn

$$R > 0, \quad y > 0,$$

oder $R > 0, \quad y < 0, \quad R - 32y(9y^2 - xz)(4y^2 - xz) > 0.$

Selbstverständlich liefert eine direkte Untersuchung der Discriminantenfläche von 2) gleichfalls Kriterien für die Anzahl ihrer reellen Wurzeln.

1) Und zwar E der Einfachheit wegen für den speciellen Wert $\mu = 0$.

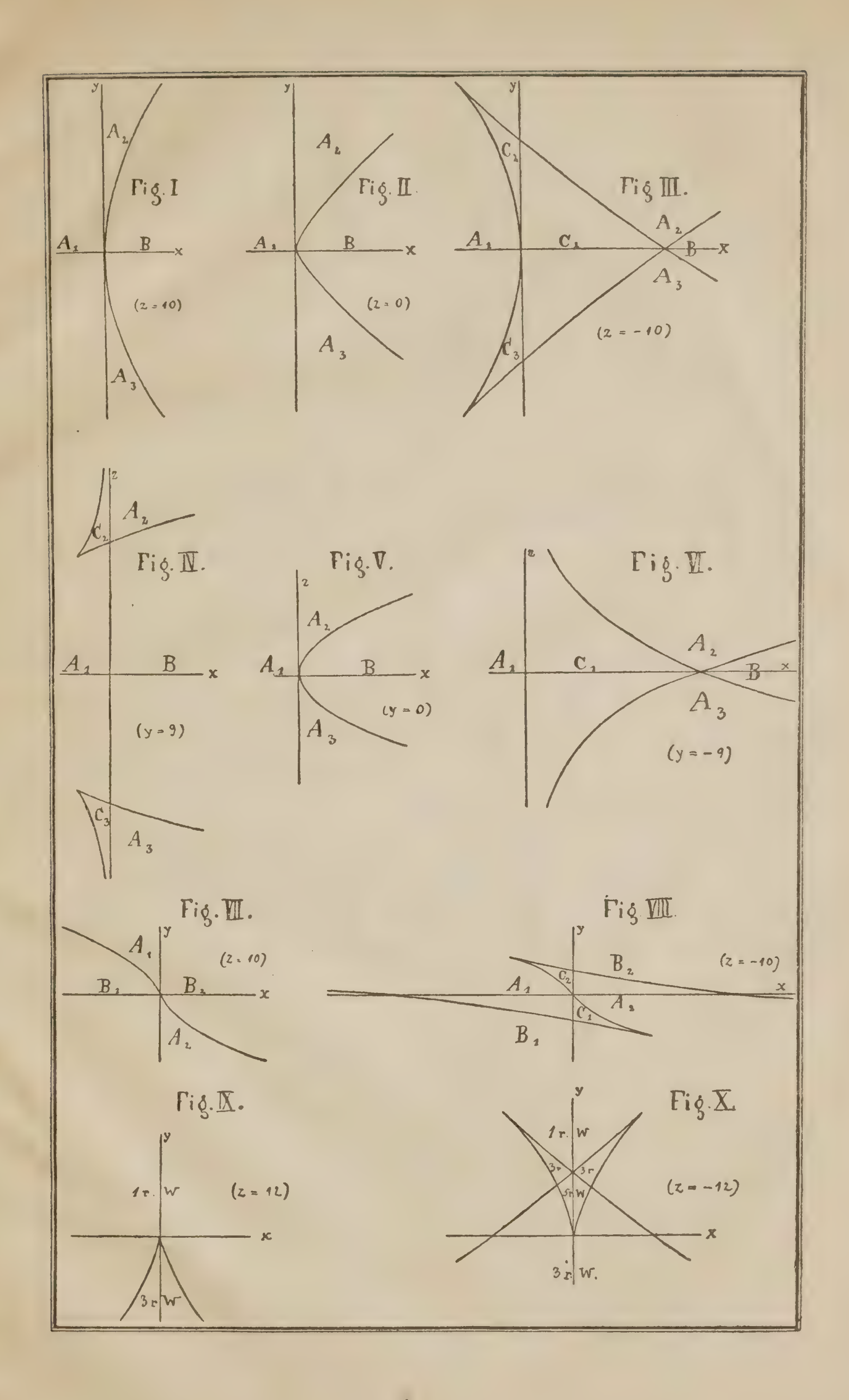


Fig. I
(z = 10)
Fig. II
(z = 0)
Fig. III.
(z = −10)
Fig. IV.
(y = 9)
Fig. V.
(y = 0)
Fig. VI.
(y = −9)
Fig. VII.
(z = 10)
Fig. VIII
(z = −10)
Fig. IX.
(z = 12)
Fig. X.
(z = −12)



THESEN.

I.

Eine vollständige Einsicht in das Wesen der Auflösung von Gleichungen erhält man erst durch Einführung der Wurzeln in die Auflösungsformel.

II.

Bei der deduktiven Entwicklung physikalischer Sätze in den Lehrbüchern sollten stets die zu Hülfe genommenen Hypothesen ausdrücklich als solche charakterisiert, die Gründe für ihre Berechtigung angegeben und Konsequenzen aus ihnen nur mittelst strenger Schlüsse gezogen werden.

III.

Es wäre vorteilhaft, wenn auf Grund eines internationalen Übereinkommens alle Abhandlungen einer bestimmten Wissenschaft in einer und derselben Sprache geschrieben würden. Für die Mathematik empfiehlt sich zu diesem Zweck die französische Sprache.

VITA.

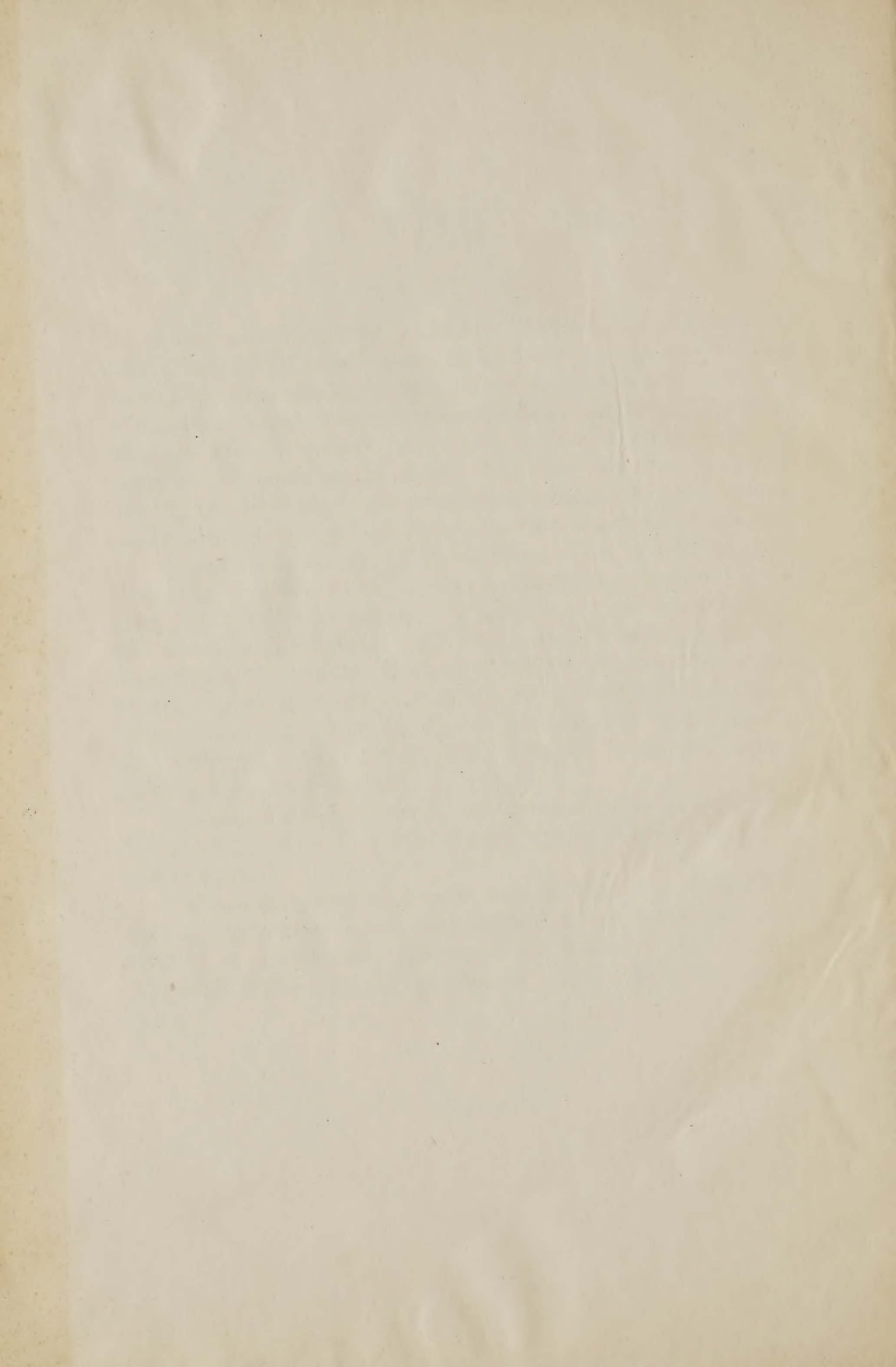
Natus sum CAROLUS FAERBER Berolini die XV mensis Julii a. h. s. LXIII patre Carolo, matre Carolina e gente SCHULZE, quos adhuc vivos maxime veneror. Fidei addictus sum evangelicae. Primis litterarum elementis imbutus scholam, quam dicunt „Luisenstädtische Oberrealschule“, adii, quae rectore BANDOW, viro et doctissimo et humanissimo, floret. Viri illius carissimi Prof. Dr. LAMPE, qui ad studium mathematicarum artium me incitavit atque omni tempore studiorum fautor fuit, memoria semper mihi colenda erit.

Maturitatis testimonio instructus autumno a. h. s. LXXXI inter cives Univ. Litt. Fridericae Guilelmae receptus sum atque sex mensibus post examine supplementario superato per octo semestria studiis mathematicis operam dedi. Viros audivi celeberrimos: DU BOIS-REYMOND, BRUNS, DILTHEY, EICHLER, FELLER, FOERSTER, FUCHS, GLAN, HETTNER, G. KIRCHHOFF, KRONECKER, KUMMER, LEHMANN-FILHÉS, NAPIER, NETTO, PAULSEN, RUNGE, TOBLER, DE TREITSCHKE, WANGERIN, WEIERSTRASS. Seminarii mathematici per quattuor semestria fui sodalis.

Omnibus his viris optime de me meritis, imprimis professoribus ill. ill. KRONECKER et WEIERSTRASS gratias maximas et ago et semper agam.

Examen pro facultate docendi cum m. Nov. a. h. s. LXXXVI Berolini sustinuissem, vere insequentis anni ad facultatem exercendam et probandam scholam Berolinensem, quae vocatur „Friedrich-Werdersche Oberrealschule“, adii, ubi nunc quoque versor.








UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.94F12H C001
HERLEITUNG VON KRITERIEN FUR DIE ANZAHL
3 0112 017082402